CORSO
DI
ANALISI ALGEBRICA
ELEMENTARE, E SUBLIME

AD USO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE DEL REGNO,
E DELLA REALE ACCADEMIA DI MARINA.

DIVISO IN QUATTRO VOLUMI.

VOLUME I.

Analisi Algebrica Elementare.

[illegible]

ELEMENTI

DELL'

ANALISI ALGEBRICA





NAPOLI

Dalla Tipografia della Reale Accademia di Marina.

1819.

AVVERTIMENTO

DELL'

AUTORE.

La continue ristampe che ho dovuto fare del mio Corso di Geometria Elementare e Sublime, dal 1810. in poi; le altre opere da me pubblicate da quell'epoca finora; e più di tutto le non poche occupazioni del mio mestiere, e gl'incarichi addossatimi dal Governo, mi hanno ritardato finora a por mano al Corso di Analisi Elementare e Sublime da me già promesso. E tal Corso dovea esser distribuibuito anche in quattro volumi, come quello Geometrico; ed il primo di essi che or si pubblica contiene l'intera Analisi de' Finiti; il secondo comprenderà l'applicazione della medesima alla Geometria; il terzo l'introduzione all' Analisi degl' Infiniti; e il quarto finalmente l'Analisi stessa degl' Infiniti. Siccome il mio scopo non è già di esser facitore di libri; ma di liberare una volta il mio paese dalla servitù di ricorrere a corsi stranieri, spesso rappezzandoli, per non esser possibile di valersi di quello di un solo Autore, così io non ho mai cercato, nè cercherò mai di por mano, a cosa che

pel corso di Matematiche abbia fatta già il nostro insigne Fergola: che perciò trovandosi egli da gran tempo composti i suddetti due ultimi volumi, e successivamente perfezionati avendoli; sicchè ora posson vedere la pubblica luce con vantaggio della gioventù Matematica; io farò tutti i miei sforzi presso sì degno soggetto, perchè voglia compiacersi a permettere che siano da me pubblicati con le stampe, lo che egli tante volte mi ha promesso. Nè mi deciderò a por io mano a questo lavoro, se non quando, pubblicati i primi due volumi, le indisposizioni di salute del Signor Fergola lo facessero a dirittura abbandonare il pensiero di pubblicare quello da lui fatto.

Senza impegnarmi quì in particolareggiare il contenuto di ciascun volume, e il metodo come sarà esso trattato, il che sarà meglio fatto in fronte di ognuno di loro; mi limiterò per ora a dar solamente conto del primo che adesso pubblico.

Esso è diviso in tre parti: la prima che comprende l' *Algebrico Algoritmo*, o sia il calcolo delle grandezze algebriche; la seconda, l' *analisi determinata*, e la terza l' *indeterminata*. Il metodo che si è tenuto, è l' analitico, più proprio in queste ricerche per la stretta connessione che esse conservan tra loro. Per tal modo le dottrine del calcolo algebrico risultano trattate con grandissima chiarezza e brevità insieme. Ciò non ostante per talune teoriche ove il suddetto metodo non produceva quei due essenziali primi effetti, che anzi ne faceva deviare, si è seguito l' ordinaria distinzione di Problemi, e

Teoremi, come nel metodo Geometrico. Così è stata di fatti trattata gran parte della teorica delle equazioni numeriche. Io ho per vero, ed in ciò non credo ingannarmi, che colui il quale s' impegna a trattare istituzioni di Matematiche, deve rivolger principalmente le sue mire alla chiarezza, ed adottare perciò quel metodo più adatto a fargliela conseguire; e questo per le diverse dottrine di Analisi non può essere sempre lo stesso. Ho adoperato con successo lo stretto metodo analitico in trattare di cose che sono l' una immediata conseguenza dell' altra; poichè l' altro metodo distrugge questa intima connessione, essenzialissima ad esser conservata, e allunga oltremodo le dimostrazioni; ma quando le dottrine da esporsi sono effettivamente staccate l' una dall'altra, e debbono rendersi inoltre enunciative; allora reca più vantaggio il secondo metodo. Ed io sarò appieno contento delle mie fatiche se i giovani mi troveranno chiaro abbastanza.

Nel trattar dell' Algebrico Algoritmo, io ho tenuto diversa via che all' ordinario, e spero non senza buon successo, e per la brevità, e perchè l' Algebra acquistasse quella generalità che l' è propria.

Ordinariamente distinguevasi il calcolo algebrico in quello delle quantità *semplici*, nell'altro delle *esponenziali*, nel calcolo de' *fratti*, in quello de' *radicali*; e non era che dalle regole della calcolazione di queste grandezze che se ne derivava poi la loro correlazione. Ma chi non vede l'impropriettà di que-

sto metodo il quale stabiliva quattro calcolazioni su grandezze che non erano diverse, che per la forma nella quale si presentavano; ma che convenivan tutte nella loro natura. Io ho dunque fatto precedere la correlazione delle quantità algebriche fra loro, al calcolo di esse; sicchè poi mi sono disbrigato con un solo calcolo per tutte. E mi fa veramente maraviglia, come questa idea sì facile a concepirsi, sebbene un poco dura nell'esecuzione, non fosse finora venuto in mente di alcun analista compilatore di Elementi (*). Nè ho creduto di seguire il metodo modernissimo de' Francesi di trattare dell' Algoritmo Algebrico, allorchè prima hanno mostrato che le operazioni di esso vengono dimostrate necessarie dallo scioglimento de' Problemi. È vero, che non è delle operazioni algebriche come delle aritmetiche, che possono isolatamente esser usate, sicchè ciascuna di esse possa diventare da se una quistione. La somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione aritmetica sono operazioni che da se sole possono risolvere una quistione; ma una somma algebrica, e così delle altre operazioni, non val nulla isolatamente, e serve solo quando combinata con altre operazioni si adopera per lo scioglimento di un problema in modo universale; ma questa non è però una ragione, perchè delle operazioni algebri-

---

(*) In questa stessa guisa, sebbene non già nel medesimo modo trovasi disposto il calcolo delle quantità algebriche nell' *Aritmetica Universale* del Newton.

che si trattasse dopo di aver proposto un Problema, e fatto vedere che si ha bisogno di quelle operazioni per venire a capo della soluzione del medesimo. Primieramente facendo in quel modo nè meno si ottiene l'intento prefisso; perchè dovendosi scegliere una quistione semplicissima, e di risolvimento intuitivo, mai si potran comprendere nella sua soluzione tutte le operazioni del calcolo algebrico; e poi queste nè meno si presenteranno in tutta quella generalità nella quale conviene che sieno considerate. Inoltre ciascuna di tali operazioni si dovrà trattare rimontando sempre a quel Problema al quale essa serviva; il che mentre stabilisce l'origine di quell' operazione, mette una certa durezza nell'esposizione delle medesime. Finalmente facendo a questo modo si è nell' obbligo di cominciare ad inviluppare l' animo de' principianti, ad un tratto, con linguaggio simbolico di grandezze, espressione simbolica delle condizioni del problema, maniera algebrica d' indicar le operazioni aritmetiche con grandezze simboliche, nozioni di equazione, d' incognita, di maneggio di esse, valore d'incognita, ec. le quali cose tutte son fuori luogo: e potrebbesi dimostrare ad evidenza che sia quì fuori luogo l'adoperarle, dalla stessa necessità, che coloro i quali hanno così incominciato l' Algebrico Algoritmo, hanno poi avuta di ripigliare da capo tali cose per trattarle a disteso, come convenivasi. D' altronde la prima idea che offresi a chi conosce già l'Aritmetica par che sia, che quella quantità ch' egli ha considerata determinata, divenisse indeterminata, e universale, e quin-

di la necessità di stabilire le regole del calcolo di queste, le quali perciò debbon procedere collo stesso ordine che quelle date pel calcolo speciale nell' aritmetica volgare; e quindi questo metodo, e non già il poc' anzi detto sarà il più naturale e proprio a trattare tali materie. Gli Analisti un poco più antichi di venti anni a questa parte hanno tutti così pensato, e non si sono certamente ingannati; e per non nominarli quì uno ad uno, basta per essi il Newton, e l' Eulero.

Mi sono, ove ho potuto farlo, valuto di dimostrazioni della teorica de' numeri presso gli antichi ricavate da' libri aritmetici di Euclide traducendole solamente nel linguaggio algebrico nostro, e con grandissimo vantaggio. I moderni Analisti hanno più amato di travagliarsi la mente talvolta in ricercare una dimostrazione, che è poi riescita difficilissima, che in prendersi la pena di legger quei libri del Geometra Greco, che son pieni di profondissime dottrine, de' quali essi si sarebbero valuti con vantaggio. Deve far pena veramente a chi ha studiato le opere de' Greci in vedere come lo spirito umano, per una certa intolleranza propria de' tempi nostri, si abbia voluto nelle sue pronfonde ricerche per l' ulteriore progresso delle scienze del *Quanto*, privare di quegli infiniti ajuti, che poteva ritrarre dalle opere di quei nostri antichi sommi maestri, che pajono ormai abbandonate a servire di suppellettili nelle pubbliche biblioteche, mentre dovrebbonsi notte, e giorno versare par le mani di chi desidera far progressi nelle Matematiche.

Causa di ciò che dico parmi essere il veder trattate da alcuni sommi Analisti moderni nelle loro profonde ricerche sulla teorica de' numeri molti teoremi, e problemi, con lunghissimo treno di calcolazioni, e di contorsioni, i quali si ammirano da Euclide elegantemente trattati.

Nella teorica delle equazioni numeriche, ho raccolto quanto vi è d' importante intorno alla loro natura; ma ho poi trasandato tutto ciò che non ho creduto nè men proprio alle ricerche ulteriori che potrebbonsi fare su questo argomento, che potrò dire Italico, poichè la più parte di esso, e la più essenziale agli Italiani è dovuta. E intorno all' Analisi indeterminata, mi sono anche limitato a quel tanto, che mi è sembrato proprio ad un corso elementare, rimettendo pel restante i giovani alle opere, che essi volendo potranno con profitto consultare.

Circa la storia dell' Algebra non mi è sembrato questo il luogo a proposito ove trattarne, perchè per tal modo avrei dovuto premettere all' apprendimento della scienza talune nozioni, e talune discussioni, che il giovane non poteva per se intendere; e perciò mi sono per ora semplicemente limitato a gettarne qualche squarcio a proposito nelle note e nel luogo ove ho giudicato opportuno.

Nè men sono stato abbondante in esempj sulle diverse teoriche di questo corso elementare; essendomi semplicemente limitato a quegli esempj, che mi dovevano servire come di necessario rischiaramento, e dirò anche meglio, come di quadro all' operazione, che aveva astrattamente esposta; e talvolta mi

son valuto anche di essi, per poter meglio esprimermi nel particolareggiare un' espressione di calcolo, o una regola. Il gravare le istituzioni di molti esempj parmi veramente che sia superfluo pe' giovani che debbono valersene per l' apprendimento della scienza; perchè il vantaggio che un tal sistema può loro recare, si può anche meglio che dal libro, ottenere dal professore che gli guida.

Ecco in breve le mie idee sul presente primo volume del corso di Analisi che io sottometto al severo giudizio de' dotti moderni Analisti.

INTRODUZIONE
AGLI
ELEMENTI DI ALGEBRA.

1. Chiunque ha appena delibati i principj della volgare Aritmetica e della Geometria conosce la duplice distinzione delle grandezze in *continue* e *discrete*; e sa pur bene che ad indicar queste vi si adoperi un numero, mentre ad esprimer le prime si ricorre ad una delle diverse specie di esteso. Or chi non vede intuitivamente, che ogni quantità geometrica può concepirsi divisa in due parti, in tre, in quattro, e generalmente in qualunque numero di parti, sicchè essa possa anche esprimersi per numeri, se una di quelle parti uguali in cui si suppone divisa si prenda per unità. Sicchè dunque ogni quantità continua potrà a discreta arbitrariamente ridursi: che perciò la differenza tra le une, e le altre sarà essenzialmente riposta in ciò; che queste hanno un' unità costante, e definita, mentre l' unità di quelle è arbitraria, e variabile. Ciò posto ad indicar la prima specie di quantità in forma discreta non bisognerà certamente far uso di numeri determinati, come nella volgare aritmetica, cioè composti di cifre: ma sì bene di numeri indeterminati e generali.

2. Inoltre queste due specie di quantità, sebbene diverse tra loro, convengono pure nella nozione generale di grandezza, e quindi debbono esser suscettive di una medesima rappresentazione, sicchè le proprietà comuni ad esse che sono quelle del loro rapporto possano dimostrarsi generalmente appartenersi alle une, ed alle altre. Adunque per questa parte si vede pure la necessità di avere un modo da indicare universalmente le grandezze.

3. Finalmente anche le quantità discrete sono dotate di alcune proprietà indeterminate e generali, le quali non già a determinati numeri solamente si appartengono; ma sono comuni a tutti gli infiniti numeri ne' quali abbian luogo le stesse condizioni. E di ciò infiniti esempj ne offre Euclide ne' suoi tre libri delle quantità commensurabili, che formano ordinariamente il VII., VIII. e IX. degli Elementi (*).

4. Così quando egli dice, che: *Ogni numero minore è parte o parti di ogni altro maggiore* (**). *I due prodotti che risultano da due numeri moltiplicandoli vicendevolmente l' uno per l' altro sono uguali tra loro* (***). *I numeri piani sono tra loro in ragion composta dai lati* (****), ognun vede chiaramente che tali proprietà non si appartengono già ad un numero determinato; ma a tutti in generale, che perciò col dimostrarvele contrassegnando i numeri su i quali si fa la dimostrazione con le cifre ordinarie dell' Aritmetica non si conseguirebbe l'

(*) Veggasi intorno a questi Libri ciò che da me si è detto nel Discorso premesso agli Elementi di Euclide.

(**) Prop. 4. lib. VII.

(***) Prop. 16. VII.

(****) Prop. 5. Lib. VIII.

intento di render tali dimostrazioni generali, come si richiede. Aggiungasi a ciò che tutti quei problemi aritmetici, che hanno le stesse condizioni; ma variano solamente nei numeri a' quali queste sono applicate debbono essere risoluti col metodo stesso; che perciò tutt' i numeri indicanti i risultamenti a' quali risolvendoli si perviene, dovendo esser determinati colle stesse operazioni di Aritmetica, si potrebbe facilmente con un risultamento solo ottenerli tutti, allorchè i numeri dati si contrassegnassero universalmente.

5. E per render ciò più chiaro con un esempio: Sia proposto a: *dividere un numero dato in due parti tali, che l' una superi l' altra per una quantità anche data.*

Questo Problema potrà esser risoluto per mezzo dell' Aritmetica, e per l' ovvia *regola del falso*, allorchè suppongasi, per esempio, il dato numero esser 100, e la differenza delle parti in cui esso deve dividersi esser 16; ed in tal caso la soluzione di esso, ci farà pervenire ad un risultamento, che soddisfa ad essa solamente; in modo tale che, se restando similmente enunciato il Problema si cambiino i numeri dati, e che la somma data si supponga esser 120, e la differenza 24; vi sarà bisogno per determinare le parti cercate in quest' altro caso, di riprender nuovamente la soluzione del Problema, come se mai fosse stato di già risoluto. Vale a dire che il precedente risultamento niente può influire alla determinazione di questo secondo problema in cui non v' è altra differenza dal primo, che nella sola grandezza de' dati.

6. Or come è chiaro, tutti i problemi che sono proposti su grandezze diverse in quantità solamente, ma colle stesse condizioni, formano un Problema solo generale, la risoluzione del quale convenevolmente fat-

ta deve offrirne benanche un risultamento generale il qual comprenda in se tutti quei risultamenti particolari che si ottennero per mezzo delle Aritmetiche ricerche. Ecco qual sarebbe una tal soluzione pel Problema poc' anzi proposto.

7. » Volendosi generalmente dividere un numero da-
» to in due parti, una delle quali superi l' altra di
» una quantità data; è chiaro che la parte maggiore,
» qualunque essa sia, deve pareggiare la minore insie-
» me con quell' eccesso dato. Or la parte minore ag-
» giunta alla maggiore deve formare tutto il numero
» proposto a dividere: quindi un tal numero dovrà
» essere uguale alla parte minore insieme con questa
» stessa parte e coll' eccesso dato. Per lo che lo stesso
» numero sarà uguale ad doppio della parte minore
» insieme coll' eccesso dato; e perciò toltone di comu-
» ne quest' eccesso; sarà il doppio della parte minore
» uguale al numero dato a dividersi, meno l' eccesso
» dato. Quindi la sola parte minore, sarà uguale alla
» metà della differenza del numero dato a dividersi, e
» dell' eccesso dato.

8. Dal qual risultamento si rileva in generale, che: *Qualunque sia il numero dato a dividersi, e qualunque l' eccesso proposto, si otterrà sempre la parte minore sottraendo dal dato numero l' eccesso dato, e dividendo il residuo per* 2. Un tal ragionamento astratto, col quale generalmente dalle cognite di un problema, per mezzo delle sue condizioni, se ne derivano le incognite, si dice *Analisi* del Problema.

9. Ciò posto se tutti i problemi proposti su i numeri fossero suscettivi per la loro soluzione di un' analisi così breve, e di passaggi sì semplici e facili a ritenersi ed a combinarsi tra loro a memoria, ciascun di essi potrebbe risolversi nel modo poc' anzi detto, e si ot-

terrebbero così per essi de' risultamenti astratti, ed enunciativi, per mezzo de' quali si avrebbe la soluzione particolare in ciascun caso ove s' individuino i numeri dati. Ma ciò non è come si è detto; ed il più delle volte la soluzione di un problema non può condursi a fine senza aver presenti all' occhio le quantità sulle quali si propone ad operare, e le operazioni che si sono già fatte su di esse, e colle quali sono connesse le altre che debbono ancora farsi per pervenire al risultamento. Su di che molti esempj se ne vedranno in fine di questa prima parte. Come far dunque in questi casi? Egli è chiaro che il solo rimedio da riuscire sia quello di ritrovare un mezzo onde esprimere astrattamente, e generalmente i numeri dati, e le operazioni da farsi su di essi.

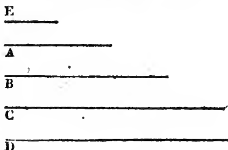
10. Or questo mezzo che sarebbe stato difficile ad escogitarsi da' Greci, lo era però facilissimo per gli Arabi da' quali Lionardo Pisano apprese, e trasportò in Italia la Scienza dell' Algebra, nel Secolo XIII., che perciò non so intendere com' essi lo abbiano trasandato; che anzi trovavano essi il tipo di questa indicazione generale delle quantità nelle opere stesse de' Matematici Greci. Ed ecco in qual modo.

11. Costoro servivansi per dinotare i numeri nella loro aritmetica delle lettere dell' Alfabeto: che perciò avrebbero essi dovuto escludere queste da un' indicazione universale de' numeri; e pure allorchè vollero indicarli generalmente, o sia far sì che per esse non determinati numeri, ma generali si esprimessero, ricorsero all' espediente di affiggere ad ognun di loro una lineetta accanto, formando come una figura. E solamente, allorchè dovevano farsi tali operazioni su questi numeri generalmente indicati, che si esigesse di esprimerne anche o somma con altri, o pur differenza, al fine di

restringere il loro ragionamento, prefissero alla linea indicante il numero due lettere, ed indicarono con due lettere, anche postevi negli estremi, le parti di essa. Su di che infiniti esempj ne offrono i libri Aritmetici di Euclide, da' quali io, per dilucidazione di ciò che ho detto, ho ricavato per un esempio il seguente.

PROP. XVI. DEL LIB. VII. DI EUCLIDE.

12. *Se due numeri scambievolmente multiplicandosi diano due prodotti, questi saranno uguali.*



Sieno i due numeri A, B, ed A multiplicando B dia C; B poi multiplicando A faccia D. Dico che C sia uguale a D.

Imperocchè se A multiplicando B produce C, B dovrà misurare C, per le unità che si contengono in A. Ma l'unità E misura il numero A per le unità che in esso contengonsi. Adunque l'unità E misura tante volte il numero A, che B misura C; per lo che, permutando, l'unità E misura ugualmente il numero B, che A misura C. Di nuovo poichè B multiplicando A fece C, A misurerà D per le unità che si contengono in B. Ma anche E misurava B per le unità che

sono in esso. Adunque l' unità E misura il numero B ugualmente che A misura D. E siccome l' unità E misurava il numero B ugualmente che A, C. Perciò A misura C, e D lo stesso numero di volte; e quindi questi prodotti sono tra loro uguali. C.B.D.

13. Ed altri esempi simili a questi incontransi nel Libro V. degli Elementi, ove le grandezze in generale sì discrete che continue indicansi universalmente con lettere, prefiggendo ad esse, per la ragione già detta, una lineetta.

14. Ma gli Arabi i quali avevan già una nuova indicazione pe' numeri (*) quella cioè di cui noi ci serviamo comodissimamente a' giorni nostri, non avrebbero dovuto durar fatica a vedere che le lettere dell' alfabeto potevano comodamente adattarsi a dinotare universalmente i numeri.

15. Or senza entrare in discussione a questo proposito per vedere chi sia stato il primo che abbia cominciato ad adoperare questo mezzo nell' algebra, per dinotare universalmente i numeri, lo che appartiene alla storia di questa scienza, ci basta solo l' aver indicato, che tal principio poteva rilevarsi benissimo dalle opere di Euclide; e sarà sufficiente lo stabilire in questo luogo la regola; che: *I numeri, come anche le grandezze continue s' indicano generalmente per le lettere piccole del nostro Alfabeto.* E anche per una maggior distinzione si è stabilito che le ultime di esse cioè x, y, z, t, u indichino le ignote, e le rimanenti altre le note de' Problemi.

(*) Le ordinarie cifre della nostra Aritmetica Volgare, sia che gli Arabi a dirittura ne fossero stati gl' inventori, sia, com' è probabilissimo, che le avessero prese dagl' Indiani.

16. Or siccome le quantità così generalmente indicate debbono condurre ne' calcoli che istituisconsi con esse a risultamenti universali, non potendosi effettuar calcolo se non per numeri, ne segue perciò che le operazioni aritmetiche che si effettuano ne' calcoli per specie non debbono consistere in altro che in indicazioni di esse, da eseguirsi poi effettivamente, allorchè ne' casi particolari si saranno sostituite alle quantità espresse letteralmente i numeri che le corrispondono.

17. Ciò posto ad indicar la somma delle quantità letterali si è adottato il segno + (*più*) che si scrive tra le quantità da sommarsi, così $a+b$ denota la somma di a con b. Per la sottrazione si è stabilito il segno — (*meno*) che denota che la lettera cui è prefisso è sottratta dall' altra che precede questo segno; così $a-b$ denota che da a deve togliersene b. Il prodotto di a per b s' indica con ab; ed in generale il prodotto di più lettere s' indica col loro accozzamento. Così abc è il prodotto delle tre quantità espresse da a, b, c. E questo prodotto si potrebbe anche esprimere nel seguente altro modo $a \times b \times c$, servendosi del segno × ch' è quello della multiplicazione, ed allora si direbbe *a multiplicata per b*, *multiplicata per c*. E potrebbesi a tal segno × sostituire anche un punto. Ma la più usata e comoda maniera è quella detta in primo luogo.

18. Finalmente la divisione di a per b s' indica per $a:b$ o per $\frac{a}{b}$, ciascuno de' quali due modi denota il quoziente di a per b, e si pronunzia a diviso per b. Ed a questa forma algebrica della divisione le si dà anche il nome di *frazione*, chiamandosi, come nella volgare aritmetica, *numeratore* la quantità ch' è sulla lineetta orizzontale, e che faceva da dividendo, e de-

nominatore quella che sta sotto la linea, e che faceva da divisore.

19. Poste queste generali indicazioni per segni delle principali operazioni aritmetiche da instituirsi sulle quantità letterali, se nel problema proposto al n.° 4. si esprima per a il numero dato a dividersi, e per b l'eccesso di una delle due sue parti sull'altra; sia poi x la parte minore incognita, per la condizione del Problema, sarà l'altra maggiore espressa da $x+b$; e quindi sarà $a=x+x+b$, cioè a sarà il doppio di x, più b, cioè $=2x+b$. E finalmente $x=\frac{a-b}{2}$. Ed in questo caso l'analisi al presente problema, che differisce da quella astratta, che si eseguì nel numero citato, solamente perchè in questa i passaggi, ed il risultamento sono simbolicamente espressi, si dirà *Algebrica*. Nè vi sarà problema aritmetico, che non possa restare in questa maniera risoluto.

20. Ed è facile anche per mezzo di questo risultamento il confermarsi in ciò che fu detto nel n.° 16. Imperocchè è chiaro che per mezzo di esso non resta determinato definitivamente qual sia il numero x, cioè la parte minore, ma solamente il sistema delle operazioni che debbono farsi per ottenerlo, allorchè per a, b si sostituiscano numeri.



DELL' ALGEBRA

LIBRO I.

DELL' ALGORITMO ALGEBRICO.

CAPITOLO PRIMO.

Della diversa forma in cui si presentano i Monomj Algebrici nel calcolo.



21. Si è già detto, che se a, e b rappresentino due grandezze qualunque, $a+b$ indicherà la somma di esse, ed $a-b$ la differenza (17). Or se tali quantità sieno della specie stessa, ma diverse in valore, nel qual caso rapportandole alla stessa unità x, la prima sia $m.x$, e la seconda $n.x$, qualunque sieno i coefficienti m ed n della x; allora la quantità $a+b$, e l' altra $a-b$ diverranno rispettivamente $mx+nx$ ed $mx-nx$. Ed è chiaro, che nel primo caso, supponendo esser q la somma de' numeri m, n, la quantità $mx+nx$ sia quanto qx.

22. Che se poi si voglia considerare la quantità $mx-nx$, si rileverà intuitivamente, che possono accader tre casi, cioè che m sia un numero maggiore di n; che gli sia uguale; o pur che m sia minore di n; il che simbolicamente si seguerebbe nel seguente modo, cioè $m>n$, $m=n$, $m<n$. Nel primo caso supponendo m maggiore di n per p, cioè $m=n+p$, è chiaro, che la quantità mx si ridurrà ad $(n+p)x$ (*), cioè ad $nx+px$ (**); e quindi che $mx-nx$ sia quanto $nx+px-nx$, cioè quanto $+px$. Supponendosi in secondo luogo, che m pareggi n, anche mx adequerà nx; e quindi la differenza loro, cioè la $mx-nx$ sarà *zero*. Finalmente se la m sia superata dalla n per p, si vedrà, come nel primo caso, che la quantità $mx-nx$ si riduca ad $mx-px$, cioè a $-px$. Adunque sottraendosi nx da mx, se n è minore di m per p, il risultamento è $+px$; esso è *zero* in caso di $m=n$; ed è $-px$ nel caso di m minore di n per p.

23. Or i primi risultamenti, cioè quelli che nascono da una quantità minore sottratta da una maggiore; ed a' quali, come dalla stessa operazione si rileva, compete il segno $+$, si dicono *positivi*, per distinguerli dagli ultimi, in cui l'operazione medesima dimostra che deve competerli il segno $-$, e che diconsi perciò negativi. Nè tra questi due stati di *positivo*, e *negativo* può immaginarsene altro per le grandezze.

(*) Quel vincolo ( ) è il segno che si adopra più comunemente dagli Analisti per dinotare, che tutta la quantità $m+p$; cioè ciascuno de' suoi termini deve esser multiplicato per la quantità x.

(**) Si può prender come un postulato algebrico, che tanto sia il prodotto di una quantità per un' altra, quanto la somma de' prodotti di una di esse per ciascuna parte dell' altra.

24. Ecco dunque l'origine algebrica delle quantità isolate negative, ed ecco ciò che esse indicano nel calcolo. E siccome si passa ad ottenerle per risultamento di una sottrazione, la quale segue lo stato intermedio tra positivo e negativo, in cui la quantità da sottrarsi si supponeva uguale a quella donde si voleva essa sottrarre, nel qual caso il residuo è zero; perciò suol dirsi ordinariamente, che le quantità negative sieno minori del zero; con la quale espressione altro non si vuol denotare, se non che esse derivino dalla sottrazione dopo il caso in cui il residuo è zero. Nè per ora occorre formarsi di queste quantità altra idea che quella che ne abbiamo data.

25. Inoltre si è già detto, che il prodotto di a per b s'indica per ab (17); e che in generale il prodotto di più quantità letteralmente espresse si dinota con l'accozzamento di esse, con quell'ordine che ne piace; ed or suppongasi che quelle quantità sieno tutte espresse dalla stessa lettera nel qual caso, in luogo di scriversi tal lettera tante volte di seguito, quante n'era multiplicata, cioè quanti sono i fattori indicati da essa, si scrive la stessa lettera una sola volta, e si dinota il numero de' fattori ad essa uguali, che debbono contenersi in quel prodotto, con quella cifra aritmetica che la rappresenta, la quale si scrive a destra della lettera, un poco più alto di essa, e chiamasi *esponente*. Così se a doveasi multiplicare per a, il prodotto aa si dirà anche a^2, che si pronunzia *a - due*. Ed in generale se i fattori uguali espressi ognuno da a sieno al numero indicato da n, il loro prodotto verrà espresso da a^n. Ogni espressione di simil forma, dicesi *esponenziale*; il numero n che dinota il numero de' fattori a contenuti nell'esponenziale a^n ne sarà l'esponente, e la lettera a, che disegna ciascun

scuno di que' fattori, si dirà base della quantità esponenziale. E suole anche la a^n chiamarsi *potenza*, come di sopra fu detto; ed il numero n prende allora il nome di *grado* di essa.

26. Ciò posto, se l'esponenziale a^n vogliasi multiplicare per l'altra a^m della stessa base; egli è chiaro, che il loro prodotto dovrà costare de' fattori uguali a dell'una, e dell'altra quantità che si multiplica, cioè di a^m e di a^n, i quali sono al numero $m+n$, che perciò un tal prodotto dovrà essere espresso da a^{m+n}. E similmente volendosi il prodotto di a^m per a^n, e per a^p, esso si trova essere a^{m+n+p}. Dal che si rileva, che: *Ogni quantità simbolica elevata ad un esponente, sia il prodotto della stessa quantità elevata separatamente a tutte quelle parti in cui si vuol concepir diviso il suo esponente.* Vale a dire che a^m è quanto $a^p \times a^q \times a^r$, ove soppongasi $m=p+q+r$.

27. Estendendo il poc'anzi detto principio, si potrà prendere l'a^m come il prodotto di $a^{\frac{m}{n}}$, per $a^{\frac{m}{n}}$, per $a^{\frac{m}{n}}$ ec. tante volte, quante bisogna, perchè dalla somma continuata di $\frac{m}{n}$ ne risulti m, cioè n di volte. E perciò si vede, che a^m sia la potenza n di $a^{\frac{m}{n}}$ (25). Laonde in generale. *Ogni quantità esponenziale* (ne v'ha quantità che nol sia; poichè ad a che dinota un solo fattore o una sola *dimensione* espressa da a, vi s'intende l'esponente 1) *può rappresentare una potenza qualunque di quel grado che vien dinotato dal numero per cui si divide il suo esponente.* Ed al contrario quest'altra esponenziale della base stessa, che ha per esponente quel quoziente, se si consideri per rispetto alla quantità di cui si è detto rappresentarne la potenza,

si dirà *radice* di quel grado stesso di cui era tal potenza. Così a^m è la potenza n di $a^{\frac{m}{n}}$; e viceversa $a^{\frac{m}{n}}$ è la radice n, o *n-esima* della quantità a^m. E questa radice suole indicarsi anche prefiggendo alla quantità di cui si prende per radice il segno $\sqrt{\ }$ che dicesi *Radicale*, e scrivendo nell' apertura di esso l' indice del radicale, cioè pel caso di sopra espresso della radice n di a^m, nel seguente modo $\sqrt[n]{a^m}$. E quell' indice suol tralasciarsi nel solo caso che sia 2; sicchè invece di scriversi $\sqrt[2]{a^m}$ basta scrivere $\sqrt{a^m}$.

28. Adunque $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; il che mostra, che: *Ogni esponenziale che ha l' esponente fratto si può rappresentare per un radicale, il cui indice sia dinotato dal denominatore del fratto esponente, e la grandezza sotto il segno radicale sia la base dell' esponenziale elevata al numeratore del fratto esponente*. Ed al contrario: *Ogni radicale si potrà sempre trasformare in un' esponenziale frazionaria, se, cioè, dividasi l' esponente della quantità sotto del segno per l' indice del radicale*.

29. Inoltre sia la quantità esponenziale a^m, ed m dinoti un qualunque numero intero o fratto, le cui parti sieno rapprentate da p, p, p, ec. in un numero determinato; sarà $a^m = a^{p+p+p+p+\cdots\cdots}$ (26); e la soppressione di ciascun p dinoterà nell' esponenziale a^m la soppressione di un fattore dinotato da a^p; o sia la divisione di a^m per a^p; che perciò se queste parti dell' esponente si sopprimano tutte, ciò ne indicherà la divisione di a^m pel prodotto di tutt' i suoi fattori, ciascuno espresso da a^p, cioè per la stessa a^m; il qual quoziente è l' unità. Ma sopprimendosi tutte

le parti p dell'esponente a^m, esso diventa zero. Adunque $a^0 = 1$; cioè: *Ogni grandezza che abbia per esponente il zero rappresenta l'unità*; e quest'unità sarà della specie stessa, che la base di quell'esponenziale. E da ciò segue, che una quantità moltiplicata e divisa ad un tratto per un'altra, resta del medesimo valore di prima, poichè essa viene ad essere multiplicata per a^0.

30. Finalmente continuandosi lo stesso ragionamento, si vedrà, che se pervenuta la quantità a^m ad a^0, per la soppressione di tutte le parti p nel suo esponente m, si continui tuttavia a supporre il suo esponente minorato di p, si verrebbero con tal operazione ad impartire alla base a gli esponenti negativi $-p$, $-2p$, $-3p$, $-$ec.; e quindi si verrebbe a formare un'altra serie di esponenziali negative a^{-p}, a^{-2p}, a^{-3p}, ... a^{-m}. Or ciascuna di quelle operazioni esprime un'ulteriore divisione della quantità ottenutasi con le divisioni precedenti. per la stessa a^p; e quindi siccome tal quantità per siffatte divisioni al numero n era ridotta ad a^0, cioè ad 1, si vedrà perciò facilmente che a^{-p} corrisponda ad $\frac{1}{a^p}$; e così a^{-2p} ad $\frac{1}{a^{2p}}$, a^{-3p} ad $\frac{1}{a^{3p}}$, ... $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Vale a dire, che: *Ogni quantità esponenziale in cui l'esponente sia negativo pareggi l'unità divisa per la stessa esponenziale coll'esponente positivo.*

CAP. II.

Conseguenze che traggonsi dalle considerazioni stabilite nel Cap. precedente.



31. Essendo ab quanto il prodotto di a per b, ed $a^m b^m$ quanto quello di a^m per b^m, ove m dinota un qualunque numero intero, o fratto, positivo o negativo; è chiaro, che se tal numero si supponga diviso in un dato numero di parti intere o frazionarie; ciascuna espressa da p, sia perciò $a^m b^m = a^p.a^p.a^p.ec. \times b^p.b^p.b^p.ec.$ cioè uguale alla quantità $a^p b^p$ moltiplicata per se stessa continuamente tante volte, quante volte p si conteneva in m. Vale a dire: *La potenza, o viceversa la radice m di una data quantità la quale consti di due o più fattori, è quanto il prodotto delle potenze o delle radici del grado stesso di que' suoi fattori.* Così, che $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5 \times (b^3)^5$, e $\sqrt[5]{a^2b^3} = \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{b^3}$.

32. Inoltre se si abbia la quantità $m.\sqrt[n]{a^{pn} q^r}$, potrà essa porsi sotto l'altra forma $m.a^{\frac{pn}{n}}.q^{\frac{r}{n}}$ (28), ch'è quanto $m\,a^p\,\sqrt[n]{q^r}$, cioè, che: *Se mai la quantità esistente sotto al segno radicale abbia un fattore da cui si possa estrarre la radice, che l' indice del radicale ne dinota, si potrà questo ridurre a forma più semplice, facendo svanire tal fattore da sotto al segno radicale, e*

multiplicando il coefficiente del radicale per quella radice di quel fattore.

33. Di più se si abbia la quantità $a^{\frac{m}{n}}$, ed essa debba elevarsi alla potenza p intera o fratta, bisognerà prendere nel primo caso quel multiplice di $\frac{m}{n}$ che vien dinotato da p (27); e nel secondo quella parte di $\frac{m}{n}$ che vien dinota da p; e saranno quel multiplice e questa parte di $\frac{m}{n}$ gli esponente rispettivi della potenza, e della radice cercata. Poichè in quel primo caso, il nuovo esponente $\frac{pm}{n}$ contenendo p di volte l' altro $\frac{m}{n}$, la quantità $a^{\frac{pm}{n}}$ dinoterà la potenza p di $a^{\frac{m}{n}}$ e nel secondo caso l' esponente $\frac{m}{np}$ contenendosi p di volte nell' altro $\frac{m}{n}$, anche la quantità $a^{\frac{m}{pn}}$ dovrà contenersi p di volte nell' altra $a^{\frac{m}{n}}$; e perciò quella sarà la radice p di questa. Val quanto dire, che: *Si eleverà una quantità data ad una data potenza, multiplicando l' esponente di quella, per l' indice di tal potenza.* Ed al contrario: *Si estrarrà da una quantità data una determinata radice, dividendo l' esponente di quella per l' indice di tal radice.* Così volendo elevare a^3 a quadrato, questo sarà $a^{3 \cdot 2} = a^6$, e volendo elevarvi $\sqrt[3]{a}$, tal quadrato sarà quanto $a^{\frac{1}{3} \cdot 2} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$. Dal che si rileva più specialmente, che: *Volendo elevare un radicale ad una data potenza, basterà elevarvi la quantità sotto del segno, o sopprimervi il segno $\sqrt{}$ nel caso, che la potenza cercata sia del grado stesso di quell' indice.*

34. Al contrario volendosi estrarre da a^3 la radice seconda, essa sarà $a^{3 \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$. E volendola di $\sqrt[3]{a}$, essa sarà $a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. Cioè: *Si estrarrà la radice da un radicale, multiplicando l' indice del radicale per quello della radice che da esso si vuole estrarre, o pure estraendola dalla quantità sotto del segno, se questa sia una potenza perfetta di quel grado che vien dinotato dalla radice da estrarsi*: poichè

$$\sqrt{\sqrt[m]{a^{pn}}} = \sqrt[nm]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{nm}} = a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}.$$

35. Ritorrando nuovamente alla considerazione stabilita nel n.° 28. si vedrà, che avendosi un radicale della seguente forma, cioè $\sqrt[pm]{a^{pn}}$, l' esponenziale frazionaria che le corrisponde sarà $a^{\frac{pm}{pn}} = a^{\frac{m}{n}}$; il che dinota, che: *Se mai l' indice, e l' esponente generale della quantità sotto al segno si multiplichino per uno stesso numero; cioè che questa si elevi a quella potenza pel grado della quale si multiplica l' indice del radicale, la quantità radicale che per tal modo si ottiene pareggerà la proposta.*

36. Ciò posto, se mai si abbiano i due radicali

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{e} \quad \sqrt[p]{b^q}$$

si vedranno ch' essi ridotti ad esponenziali diverranno rispettivamente

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{e} \quad b^{\frac{q}{p}}$$

o pure . . . . . $a^{\frac{mp}{np}}$ e $b^{\frac{nq}{np}}$

se si riducano gli esponenti frazionarj al medesimo denominatore; o finalmente a

$$\sqrt[np]{a^{mp}} \quad e \quad \sqrt[np]{b^{np}}$$

passando di nuovo da esponenziali frazionarj a' radicali. Dal che si rileva, che: *Due radicali d'indice diverso possonsi sempre ridurre a due altri rispettivamente uguali a' proposti e dell'indice stesso, prendendo per indice comune de' radicali ridotti il prodotto degl'indici de' radicali proposti, ed elevando la quantità ch'è sotto al segno di ciascun di questi alla potenza dinotata dall' esponente dell' altro.*

37. Che se l'indice dell' un radicale riuscisse esattamente divisibile per l'esponente dell' altro, si rileverà facilmente, che la suddetta riduzione de' radicali si otterrà: *Multiplicando l' indice minore per quel quoziente che si ottiene dividendo per esso l' indice maggiore; ed elevando alla potenza dinotata da tal quoziente stesso la quantità sotto al segno di quel radicale.*

Così $\sqrt[4]{a^3}$ e $\sqrt{b}$ ridotti all' indice stesso diverranno $\sqrt[4]{a^3}$ e $\sqrt[4]{b^2}$.

E ciò che si è stabilito nella presente Regola è una immediata conseguenza del n.° 28, e della ordinaria teorica per la riduzione de' fratti allo stesso denominatore.

CAP. III.

Del Segno che affetta le quantità algebriche dopo le operazioni aritmetiche che si fanno con esse, cioè Somma, Sottrazione, Moltiplicazione, Divisione, Elevazione a potenza, o Estrazione di radice.

30. Le quantità algebriche potendo presentarsi nel calcolo affette dal segno +, o dal —, come si è di sopra veduto (22), bisogna perciò porre ad esame qual differenza induca ne' risultamenti de' calcoli suddetti questa differenza de' segni. E primieramente per ciò, che riguarda la somma, è chiaro, che nessuna alterazione possa indurre nel risultamento la diversità del segno de' termini analitici da sommarsi; mentre la natura stessa dell' operazione indica chiaramente, che le quantità date debbono comprendersi nella somma col segno stesso che avevano. È chiaro ancora, che nella sottrazione, qualunque sia il segno del Minuendo, se quello del Sottraendo è positivo, cioè +, debbasi esso cambiare in —, come sta detto nel n.° 21., cioè che sottraendo da A, +B, il residuo debba essere A—B, ove A si suppone affetta da qualunque segno. Resta ora a vedere cosa avvenga allorchè da A si sottrae —B. Or in tal caso è chiaro, che aggiungendo a queste due quantità una stessa quantità +B, non si debba cambiare il residuo. Ma con tale aggiunzione, il minuendo diviene A+B, divien zero il

sottraendo; e perciò il residuo è uguale al minuendo A+B. Adunque per aversi il residuo di A minuendo e —B sottraendo, conviene aggiungere ad A il —B col segno cambiato. Ma la stessa aggiunzione col cambiamento di segno aveva avuto già luogo nell'altro caso ove il sottraendo era +B. Adunque generalmente: *Il residuo risulterà sempre che si aggiunga al minuendo il sottraendo col segno cambiato nell'opposto*, cioè il + in —, e 'l — in +.

39. Passando adesso alla multiplicazione, potremo prendere come *Postulato*, che $+A \times +B = +AB$: resta adunque a vedere qual segno tocchi al prodotto di +A per —A, e di —A per —B. Or nel primo di questi casi è chiaro che il segno del prodotto non possa essere +; poichè altrimenti un tal prodotto sarebbe identico all'altro di +A per +B; e quindi essendo pur identici i fattori +A e +A, lo dovrebbero anche essere gli altri due +B e —B: dal che si trarebbe, con aggiungervi di comune +B, $2B = 0$. Che perciò il prodotto di +A per —B dovrà essere —AB (17). Vale a dire, che: *Quando uno de' fattori è negativo, il prodotto sarà anche negativo.*

Finalmente con un ragionamento analogo al precedente si rileverà, che il prodotto di —A per —B debba essere +AB; mentre supponendo ch' esso fosse —AB, verrebbe a confondersi con quello di +A per —B; che perciò sarebbe come poc' anzi $+B = -B$, e $2B = 0$; cioè: *Quando i due fattori sono negativi, o sia affetti dal segno —, il prodotto risulta positivo.*

40. E dalle considerazioni del n.° precedente si rileva la regola ovvia pe' segni nella multiplicazione, cioè che: *Gli stessi segni danno + per segno del prodotto, ed i diversi —.*

41. Or siccome ogni potenza non è che un prodotto successivo di fattori uguali (25), segue perciò dalla regola precedentemente stabilita, che: *Sarà sempre + il segno di una potenza di grado pari di una quantità, sia questa positiva, o pur negativa; e se il grado della potenza è impari, avrà essa lo stesso segno che avea la radice.*

42. Dalle cose poc' anzi dette si rileva pure, che volendosi scindere un prodotto affetto da + in fattori, sia dubbio se questi debbano avere ciascheduno il segno +, o pure il —; e che sarà anche dubbio se la radice di grado pari di una quantità positiva debba essere affetta dal segno +, o dal —; che perciò in simili rincontri si prefigge a que' fattori o a questa radice il doppio segno $\pm$. Ed è anche manifesto dal precedente numero, che sia impossibile la radice par di grado di una quantità negativa, ossia affetta dal — mentre si è veduto, che quella quantità non può giammai aver luogo come potenza pari di un' altra; che perciò dagli Analisti a questa specie di radici, che occorre considerare nel calcolo algebrico, si è dato il nome d' *impossibili*, o più comunemente di *Radici immaginarie*.

43. Le considerazioni stesse stabilite pe' segni nella multiplicazione, traggono con loro, per immediata conseguenza la Regola pe' segni nella Divisione. Imperocchè essendo $+AB = \pm A \times \pm B$, è egli chiaro, che se $+AB$ si divida per $\pm A$ debba corrispondentemente risultarne per quoziente l' altro fattore $\pm B$ (*),

(*) Si avverta che in questi doppj segni, bisogna una volta prendere i due superiori, ed un'altra i due inferiori, e così più appresso in questo numero stesso.

cioè che: Dividendosi $+AB$ per $+A$ il quoziente è $+B$; e dividendo quella quantità per $-A$, dovrà esser $-B$ il quoziente. E siccome $-AB=-A\times+B$, si vede perciò, che dividendosi $-AB$ per $+B$ debba risultarne per quoziente $-A$; ed al contrario, prendendo per divisore di $-AB$ il fattore $-A$, il quoziente dovrà essere l'altro fattore $+B$. Vale a dire, che del pari che nella multiplicazione: *Allorchè il dividendo e 'l divisore hanno lo stesso segno, il quoziente è positivo; ed è negativo se quelli avevano segni diversi.*

CAP. IV.

Della Diversità che passa tra la nature delle operazioni Algebriche, e quella analoghe della volgare Aritmetica.

44. L'Algebra essendo, come fu da principio detto, un' Aritmetica universalizzata, convien sempre, che nel trattar di essa si abbia la mira a mostrare la corripondenza, o la diversità tra le operazioni che si eseguono col calcolo aritmetico, e con l'algebrico; che perciò sebbene quello che saremo per dire nel presente Capitolo si possa agevolmente rilevar da chiunque pongasi a riflettere su quando ne' precedenti si è detto, non ostante non abbiamo stimato inopportuno pe' giovani che ciò sia ad essi manifestamente esposto. Intanto uopo è stabilire prima di ogni altra cosa le seguenti Definizioni di alcune voci.

45. Per *Monomio*, o *Termine Analitico* s'intende una qualunque espressione di quantità algebrica con un solo segno, cioè non interrotta da segni, e con un solo coefficiente.

Tali sono le quantità $3a^2x^3y$, $4a\sqrt{q}$, $\frac{m.a^3x^3\sqrt{q}}{3p\sqrt{y}}$ ec.

46. Più monomj scritti l'un dopo l'altro, ed enunciati o presi come una sola espressione algebrica, diconsi *Polinomio*. Ed ogni Polinomio prende poi più specialmente il nome di *Binomio*, *Trinomio*, *Quadri-*

nomio, *ec.* dall' esser due, tre, quattro, o più i termini che compongono l' espressione che lo dinota.

Così $3a^2b - 5xy$ è un *Binomio*.
$3a^2b - 5xy + 4z$ è un *Trinomio*.
$3a^2b - 5xy + 4z - 4x^2$ è un *Quadrinomio*.
ec.

47. Or poichè, siccome è chiaro, la natura della quantità rappresentata da un monomio algebrico risulta dalle lettere accozzate che in esso si contengono, e da' rispettivi esponenti di queste, senza che vi contribuiscano affatto i coefficienti, i quali servono solamente ad esprimere i multiplici, o i summultiplici di una quantità; e senza che vi contribuiscano i segni, che come si vide non sono che accidentali alle quantità, risultando essi dalle operazioni che su quelle si istituiscono ne segue perciò, che ogni qual volta due monomj algebrici conterranno le stesse lettere, e per le identiche di queste gli stessi esponenti, variando poi, se così avviene, ne' coefficienti, essi esprimeranno in diversa quantità la cosa stessa; e se variano anche ne' segni, dinoteranno anche diverso stato di quella tal cosa. Adunque tali due monomj rapportandosi alla stessa unità, che può esser rappresentata dal complesso della parte letterale di ciascun monomio. Si potranno ridurre facilmente ad un solo, con la somma de' coefficienti, se essi avevano il segno stesso; e col sottrarre dal coefficiente maggiore il minore, dando al residuo il segno di quello, se tali monomj erano di contrario segno.

Così per esempio i due monomj

$+3a^2x$ e $+5a^2x$

equivalgono a $+8a^2x$.

e gli altri

$$\mp 3a^2x \quad \text{e} \quad \pm 5a^2x$$

equivalgono a $\pm 2a^2x$

48. Or questa operazione per mezzo della quale due termini analitici, che variano solo ne' coefficiente e ne' segni, e lo stesso di più, ed i quali chiamansi *simili*, riduconsi ad un solo, dicesi *Contrazione*, o *Riduzione*.

49. Dalle considerazioni precedentemente stabilite si rileva, che la contrazione non possa aver luogo tra due termini che non sieno simili, come per esempio

$$+3a^2x \quad \text{e} \quad +5a^2x^2$$

o pure $+3a^2x$ e $+5b^2y$

ciò non ostante nulla impedisce che l' Analista consideri queste quantità dissimili, cioè di diversa natura, sommate l' una l' altra, o sottratte l' una dall' altra, e quindi si abbia per le poc' anzi dette

la somma $+3a^2x+5a^2x^2$

il residuo $+3a^2x-5b^2y$

Ed ecco già una delle principali differenze tra le operazioni aritmetiche, e le algebriche: l'aritmetica non può istituir somma e sottrazione, che tra quantità numeriche rapportate alla stessa unità o ad unità correlative, e quindi tra quantità simili; mentre l' algebra estende tali operazioni anche alle quantità dissimili; il che fa, che solamente questa sia suscettiva di espressioni quantitative polinomie, mentre la prima non riconosce, che solamente monomj; poichè a tale stato riduce sempre un numero qualunque di quantità simili la contrazione.

50. L'altra essenzial differenza tra il calcolo aritmetico; e l'algebrico consiste nel dar quello l'effettivo risultamento delle operazioni che con esso si cercavano, mentre questo non fa altro, che indicare in prospetto le operazioni aritmetiche da eseguirsi per ottener quel risultamento, allorchè le quantità letterali si cambiassero in numeriche. Così per esempio l'espressione $3a^2x$ non è già il valore enunciativo del prodotto de' tre fattori, cioè di 3, del quadrato di a, e di x, ma una semplice indicazione di tal prodotto, il quale si otterrebbe solamente allorchè dando ad a ed x i valori numerici, si eseguisse il quadrato di a, e poi si multiplicasse per 3 e pel numero che vien rappresentato dalla x. Così che è manifesta la differenza tra il risultamento di una operazione aritmetica, e quello di simile operazione algebrica; poichè il primo non è che individuale o appartenente ad un solo di tali operazioni, mentre l'altro è universale, e comprende tutti gli altri casi analoghi.

51. Inoltre è anche chiaro, che ne' risultamenti aritmetici non si possa scorger la via per la quale vi si è pervenuto; e quando anche questa si sappia, s'ignore pure da quali dati si è partito; mentre e quella, e questi evidentemente si mostrano ne' risultamenti del calcolo algebrico, vedendosi come in un quadro e la natura delle operazioni che ha bisognato effettuare per ottenerlo, e le quantità che vi hanno servito di base. Così, per esempio, ritrovandosi il numero 36 per risultamento di un calcolo aritmetico, non si può da esso discernere con quante e quali operazioni siasi esso ottenuto, avendo potuto derivare ugualmente per somma, per residuo, per prodotto, per quoziente ec. o da queste operazioni in qualunque modo combinate insieme, e ciò in infiniti modi diversi; il che, quando anche

fossero note le specie di operazioni che lo hanno prodotto, ci lascerebbe tuttavia nell' oscurità degli elementi donde si è partito; ma al contrario l' espressione $3ax$ algebrica fa intuitivamente conoscere ad ognuno, ch' essa risulta dal prodotto del quadrato di a per la x preso 3 volte. E ciò basta per ora sul presente argomento.

CAP. V.

DEL CALCOLO ALGEBRICO.

52. In questo Capitolo ove imprendo a trattare del calcolo Algebrico, comprenderò nelle principali operazioni diverse di tal calcolo, le quantità in generale razionali o irrazionali, intere o fratte. E queste principali operazioni, sono, come nell' Aritmetica Volgare, la *Somma*, la *Sottrazione*, la *Multiplicazione* e la *Divisione*, delle quali eccone partitamente l' andamento.

DELLA SOMMA, E SOTTRAZIONE.

53. Per ciò che spetta alla somma, e sottrazione delle quantità algebriche non v'è alcuna regola a stabilire, rilevandosi dal n.° 38. che la somma delle algebriche espressioni si ottiene col disporle l' una dopo l' altra col proprio loro segno, ed eseguendo poi la contrazione tra i termini simili, se mai ve ne sono: e che la Sottrazione non è altro, che una somma della quantità da sottrarsi col segno cambiato, all' altra donde si vuol essa sottrarre. Sicchè basterà per tali due operazioni il recar qui il seguente

Esempio.

Espressioni date $\begin{cases} 3a^2x - 7b^3y^2 + 4x\sqrt{y} - 5y\sqrt{x} \\ 2a^2x^2 - 5b^3y^2 + \frac{6x}{7y} - 6y\sqrt[4]{x^2} \end{cases}$

Som. di esse $3a^2x + 2a^2x^2 - 12b^3y^2 + 4x\sqrt{y} + \frac{6x}{7y} - 11y\sqrt{x}$

Resid. che si ha sottraendo la 2 dalla 1. $3a^2x - 2a^2x^2 - 2b^3y^2 + 4x\sqrt{y} - \frac{6x}{7y} + y\sqrt{x}$

54. Ove è da notarsi solamente, che i quarti termini delle espressioni date, i quali contengono per fattori quantità radicali sono simili, sebbene non l' apparissero a prima vista, per essere quello della seconda di esse suscettivo di riducimento; ha però bisognato eseguirvi prima una tale operazione, e poi la contrazione.

55. Chi volesse poi convincersi della genuinità di quel residuo, anche partendo dall' ordinaria nozione che di esso si ha, cioè che debba la somma del medesimo, e del sottraendo produrre il minuendo, troverà ciò vero effettuando tal somma.

56. Allorchè però nelle espressioni proposte per la Somma, o per la Sottrazione vi sono de' fratti; i risultamenti di tali operazioni sono ancora suscettivi di riducimento; del che tratteremo dopo di aver esposte le regole per la Multiplicazione, e per la Divisione delle quantità algebriche in generale.

Della Multiplicazione.



57. In primo luogo sia proposto a multiplicare

il monomio $m.a^p x^q$
per l' altro $n.b^r y^t$

ove m, n, p, q, r, t dinotino qualunque numeri razionali. Egli è chiaro dal n. 17. che il prodotto cercato sia

$$mn.a^p b^r x^q y^t$$

Ciò posto, passiamo ad esaminare particolarmente le diverse forme che prende tal prodotto, secondo i segni e la qualità intera o fratta degli esponenti p, r, q, t.

58. Primieramente sia negativo l' esponente q, sicchè quel primo fattore si trasmuti nel fratto $\frac{m.a^p}{x^q}$; è chiaro, che il prodotto di sopra indicato prenderà in questo caso la forma

$$\frac{mn.a^p b^r y^t}{x^q}$$

donde si rileva, che: *Un monomio frazionario si multiplica per un altro monomio intero, multiplicando il numeratore del fratto per l' intero, e ritenendo pel prodotto quello stesso denominatore, che apparteneva al fratto dato.*

59. Ed essendo negativo anche l' esponente t della y nell' altro fattore, sicchè questo si riduca ad

$$\frac{n.b^r}{y^t}$$

quel prodotto da prima ottenuto diverrà della forma

$$\frac{mn.a^p b^r}{x^q y^t}$$

che dimostra, che: *Due monomj frazionarj si multiplicano tra loro, multiplicando tra loro i numeratori, e tra loro anche i denominatori.*

60. Che se l'esponente q della x fosse stato un fratto, per esempio $\frac{2}{3}$; sicchè quel primo fattore si cambj in

$$m.a^p \sqrt[3]{x^2} \quad (a7)$$

il prodotto di sopra espresso prenderà anch'esso la forma

$$mn.a^p b^r y^t \sqrt[3]{x^2}$$

dalla quale si rileva, che: *Un monomio razionale si multiplica per un altro monomio radicale, multiplicando il cofficiente di questo, cioè la quantità ch' è fuori del segno radicale, per quel primo monomio.*

61. E supponendo inoltre, che sia anche frazionario l'esponente t, ed espresso da $\frac{1}{2}$, sicchè il fattore ove contiensi la y^t sia della forma

$$n.b^r \sqrt{y}$$

in tal caso il prodotto sarà della forma

$$mn.a^p b^r \sqrt[3]{x^2} \sqrt{y}$$

Ov' è da avvertirsi, che siccome i due fattori

$$\sqrt[3]{x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{y}$$

corrispondono a $x^{\frac{2}{3}}$ ed $y^{\frac{1}{2}}$

ossia $x^{\frac{4}{6}}$ ed $y^{\frac{3}{6}}$

riducendo que' primi esponenti frazionarj allo stesso

denominatore, e perciò trasmutandoli di bel nuovo ne' corrispondenti radicali, a

$$\sqrt[6]{x^4} \quad e \quad \sqrt[6]{y^3}$$

il cui prodotto è $\sqrt[6]{x^4y^3}$ (31); perciò quel prodotto già indicato di sopra diverrà

$$mn.a^pb^r\sqrt[6]{x^4y^3}$$

Cioè a dire, che: *Due monomj radicali si multiplicano tra loro, riducendo prima que' radicali allo stesso indice, e poi multiplicando tra loro i coefficienti di questi, ed anche tra loro le quantità sotto a' segni de' medesimi radicali.*

62. E per la riduzione de' due radicali al medesimo indice; lo stesso che si è qui sopra operato (61) ne mostra, che la regola per eseguirla sia la seguente, cioè: *Si prenda per indice comune de' radicali ridotti il prodotto de' radicali da ridursi, e si ponga sotto al segno di ciascun di quelli la quantità che v' era nel corrispondente radicale da ridursi, elevata alla potenza dinotata dall' indice dell' altro.*

Così i radicali ridotti da' due

$$\sqrt[m]{a^p} \quad e \quad \sqrt[n]{b^q}$$

sono i seguenti altri

$$\sqrt[nm]{a^{pn}} \quad e \quad \sqrt[mn]{b^{qm}}$$

63. E per l' uso più esatto della presente regola conviene anche avvertire, che qualora l' indice di un radicale fosse esatto divisore dell' esponente dell' altro, quella riduzione si esegue più convenevolmente *multiplicando l' indice del radicale di minor grado pel quoziente che si ha dividendo per questo l' indice dell' altro;*

ed elevando nel tempo stesso alla potenza dinotata dal quoziente poc'anzi detto la grandezza sotto al segno di quel primo radicale. E ciò facilmente si rileva da n.° prec. combinato con l' ordinaria teorica della riduzione de' fratti allo stesso nome, quando il denominatore dell' uno sia esatto divisore di quello dell'altro.

Così i radicali ridotti da' due

$$\sqrt[3]{a^2} \quad \text{e} \quad \sqrt[6]{b^3}$$

saranno $$\sqrt[6]{a^4} \quad \text{e} \quad \sqrt[6]{b^3}$$

64. Che se i fattori proposti fossero nel tempo stesso radicali e frazionarj, si otterrà il prodotto, com' è di per se chiaro, combinando insieme le regole date ne' numeri precedenti. Sicchè pel caso della multiplicazione de' monomj non resta altro a considerare.

65. Suppongasi ora che sia polinomio l'un de' fattori; risulterà il prodotto di esso per l' altro fattore monomio, dalla somma de' prodotti parziali di tutt'i termini di quel polinomio per questo monomio; ed una tale operazione rientrerà perciò nel caso precedente; come lo mostra il seguente esempio

Fattori $\begin{cases} 3a^2x - 4b^3y + 5\sqrt[3]{x^2} \\ 2a^2y \end{cases}$

Prodotto $6a^4xy - 8a^2b^3y^2 + 10a^2y\sqrt[3]{x^2}$

66. Finalmente essendo polinomj ambo i fattori, risulterà il prodotto, com' è chiaro, dalla somma de' prodotti di un di essi per ciascun termine dell' altro, del che eccone un esempio

$$\text{Fattori}\ \begin{cases} 3a^2x - 4b^3y + 5\sqrt[3]{x^2} \\ 2a^2y - 4q\sqrt{y} \end{cases}$$

$$\text{Prod. parz.}\ \begin{cases} 6a^4xy - 8a^2b^3y^2 + 10a^2y\sqrt[3]{x^2} \\ \qquad - 12a^2qx\sqrt{y} + 16b^3qy\sqrt{y} - 20q\sqrt[6]{x^4y^3} \end{cases}$$

$$\text{Prod totale}\quad 6a^4xy - 8a^2b^3y^2 + 10a^3y\sqrt[3]{x^2} - 12a^2qx\sqrt{y}$$
$$+ 16b^3qy\sqrt{y} - 20q\sqrt[6]{x^4y^3}$$

67. Ov' è da osservarsi, che sebbene sia arbitraria la maniera di disporre i prodotti parziali, pure conferisce in alcuni casi alla contrazione, il diporre que' tali prodotti in modo che i termini simili si corrispondano in una stessa linea verticale

$$\text{Fattori}\ \begin{cases} a+b \\ a-b \end{cases}$$

$$\text{Prod. parz.}\ \begin{cases} a^2 + ab \\ \qquad - ab - b^2 \end{cases}$$

$$\text{Prod.totale}\quad a^2 \quad\quad - b^2$$

68. E questo risultamento ne mostra per intuiziono, che: *Moltiplicandosi la somma di due numeri, per la loro differenza, si ottiene la differenza de' quadrati di que' numeri stessi.*

69. E per questi due precedenti casi della moltiplicazione conviene avvertire, che ove avvenga, che uno de' fattori, o pur tutti due sieno quantità frazionarie, o pur radicali, si dovrà alle regole in essi date per prendere il prodotto, accoppiar quella stabilita nel primo caso relativamente a tali specie di quantità; le quali regole sebbene ivi stabilite spcialmente pe' monomj, pure ognun rileva facilmente, che niente impedendo perchè ciascuna di quelle lettere che ivi

indicava un monomio, o un suo fattore, rappresentasse un polinomio qualunque, si possono perciò esse ad ogni specie di polinomj algebrici estendere. Ed i seguenti esempj mostreranno in prospetto l' uso delle medesime

$$(3a^2x-4b^3y) \times \frac{2y+4q}{3m^2+4n^2} = \frac{(3a^2x-4b^3y) \times (2xy+4q)}{3m^2+4n^2}$$
$$= \frac{6a^2x^2y-8b^3xy^2+12a^2qx-16b^3qy}{3m^2+4n^2}$$

$$\frac{3a^2x-4b^3y}{a^2-b^2} \times \frac{2xy+4q}{3m^2+4n^2} = \frac{(3a^2x-4b^3y) \times (2xy+4q)}{(a^2-b^2) \times (3m^2+4n^2)}$$
$$= \frac{6a^2x^2y-8b^3xy^2+12a^2qx-16b^3qy}{3a^2m^2-3b^2m^2+4a^2n^2-4b^2n^2}$$

$$(3a^2x-4b^3y)\times 3y\sqrt{(2xy+4q)}=(9a^2xy-4b^3y^2)\sqrt{(2xy+4q)}$$
$$=9a^2x\sqrt{(2xy+4q)}-4b^3y^2\sqrt{(2xy+4q)}$$

$$(3a^2x-4b^3\sqrt{y}) \times 3y\sqrt{(2xy+4q)}=9a^2xy\sqrt{(2xy+4q)}$$
$$-12b^3y\sqrt{(2xy^2+4qy)}$$

DELLA DIVISIONE.



90. Vogliasi ora dividere il monomio

$m.a^px^q$ per l' altro $n.b^ry^t$

ove similmente sieno m, n, p, q, r, t numeri qualunque positivi o negativi, interi, o fratti; il quoziente verrà espresso dal fratto

$$\frac{m.a^px^q}{n.b^ry^t} \quad (18)$$

ossia

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a^px^q}{b^ry^t}$$

71. Or suppongasi, che l'esponente q sia negativo, sicchè il dividendo $m.a^p x^{-q}$ si cambj nel fratto $\frac{m.a^p}{x^q}$; il quoziente poc' anzi ottenuto si trasmuterà anch' esso nell' altro

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{a^p}{b^r x^q y^t}$$

dal quale si rileva, che: *Per dividere un fratto per un intero, bisogna multiplicare per quell' intero il denominatore del fratto.*

72. Che se fosse anche negativo il t, sicchè il divisore proposto sia anche frazionario, ed espresso da $\frac{n.b^r}{y^t}$; il quoziente sarebbesi cambiato in

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{a^p}{\frac{b^r}{y^t}\,x^q}$$

ed introducendo nel numeratore e denominatore di tal fratto il fattore y^t, il che non altera il suo valore (19), esso diverrà

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{a^p y^t}{b^r x^q}$$

donde si rileva, che: *Il quoziente di un fratto per un altro, corrisponde al prodotto del primo per lo secondo rovesciato.*

73. Che se il q sia frazionario, ed espresso da $\frac{2}{3}$, e 'l t anche frazionario, ed espresso da $\frac{1}{2}$; sicchè le espressioni proposte a dividersi sieno della forma

$$m.a^p\sqrt[3]{x^2} \quad \text{ed} \quad n.b^r\sqrt{y}$$

o pure $$m.a^p\sqrt[6]{x^4} \quad \text{ed} \quad n.b^r\sqrt[6]{y^3} \quad (36)$$

il quoziente cercato sarà

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a^p}{b^r} \sqrt[6]{\frac{x^4}{y^3}}$$

donde si ha la regola per dividere due monomj radicali, che consiste in: *dividere tra loro i coefficienti, e tra loro le grandezze sotto de' segni radicali, ridotti prima questi all' indice stesso* (36). Ed una tal regola combinata con la precedente, darebbe l' altra pel caso che fossero nel tempo stesso radicali e frazionarj i termini dati.

74. E non è fuor di proposito di quì avvertire, che tutte le precedenti regole per la divisione de' monomj algebrici, avrebbonsi potuto anche rilevare da quelle già date per la multiplicazione, partendo dal principio, che il quoziente debba essere tal quantità, che multiplicata pel divisore produca il dividendo. E da questo stesso principio è facile il rilevare, che la regola per dividere un polinomio per un monomio si è quella di dividere ciascun termine di quel polomio per tal monomio.

75. E dal principio stesso ricaveremo ora la regola per la divisione di un polinomio per un altro.

Sia dunque A+B+C+ec. un polinomio da multiplicarsi per l' altro M+N+ec. Egli è chiaro dal n.° 66., che il prodotto cercato debba costare de' seguenti prodotti parziali, cioè

A × (M+N+ec.)
B × (M+N+ec.)
C × (M+N+ec.)

da' quali prodotti parziali si rileva per intuizione

che l' A termine dell' un fattore, entra per multiplicatore in tutt' i termini dell' altro; e similmente il B, e 'l C. Adunque volendo dividersi quel prodotto totale pel fattore A+B+C+ec.; se si prenda in quello un termine qualunque che sia divisibile per A; il quoziente dovrà essere un de' termini dell' altro fattore, per esempio, M; e questo multiplicato per l' intero divisore A+B+C+ec. dovrà avere nel dividendo proposto tre termini di rincontro, co' quali si dovrà perciò distruggere sottraendo quello da questo, a meno che la contrazione non ne avesse fatto scomparire taluno in quel dividendo, nel qual caso la presente sottrazione vel restituirebbe. In seguito della finora descritta operazione dovranno nel residuo che si ottiene sparire tutt' i termini che contenevano la M; che perciò preso in questo un termine divisibile per quello stesso A del divisore, ed eseguita la divisione di quel termine per questo, si avrà un altro quoziente N, che similmente multiplicato per l' intero divisore A+B+C+ec. dovrà trovare in quel residuo di poc' anzi, che ha fatto da dividendo, altrettanti termini di rincontro, co' quali si distruggerà per la sottrazione, dando luogo ad un nuovo residuo, in cui non dovrà trovarvisi nè men per fattore la N; e così in seguito.

76. È facile il rilevare dal già detto, che la divisione non possa tentarsi, che nel solo caso, che sienvi lettere comuni al dividendo ed al divisore; e che l' operazione incominciata si arresterà quando ciò comincia a non aver più luogo. Sicchè dopo le cose esposte nel precedente numero, potrà stabilirsi per tale operazione la seguente regola

Per eseguirsi la divisione di un Polinomio per un altro, si ordini il dividendo e 'l divisore per rapporto

ad una stessa lettera (*) *e poi si divida il primo termine del dividendo per lo primo del divisore, il quoziente che si ha si multiplichi per l' intero divisore, e'l prodotto che si ottiene si sottragga dal dividendo. Indi ordinato il residuo per la stessa lettera, si continui la divisione come poc' anzi, finchè o si abbia per ultimo residuo il zero, il che dinoterà che quel divisore era effettivamente un fattore del dividendo, l' altro de' quali vien dinotato dal quoziente; o pure si pervenga a tal residuo, che non possa più continuarsi la divisione, del qual caso ragioneremo di quì a poco nel seguente Capitolo.*

77. Per ora supporremo ne' seguenti due esempj aver luogo il primo de' suddetti casi

Divisore		*Dividendo*
$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$		$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
$Q.\ a^3-4a^2b+2b^3$		$5a^7-2a^6b+4a^5b^2$
	1. *Res.*	$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
		$-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3$
	2. *Res.*	$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
		$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
	3. *Res.*	$0 \quad 0 \quad 0$

Le espressioni date si sono ordinate per rapporto alla lettera a, e la divisione si nel dividendo proposto,

(*) Cioè si dispongano i termini dell' uno e dell' altro secondo gli esponenti di questa lettera.

che in ciacun de' residui si è sempre fatta pel termine $5a^4$.

	Divisore		*Dividendo*
	$a^{1}-b^{1}$		a^4-b^4
			a^4-a^3b
Quoz.	$a^3+a^2b+ab^2+b^3$		
		1. *Res.*	$+a^3b-b^4$
			$+a^3b-a^2b^2$
		2. *Res.*	$+a^2b^2-b^4$
			$+a^2b^2-ab^3$
		3. *Res.*	$+ab^3-b^4$
			$+ab^3-b^4$
		4. *Res.*	$0 \quad 0$

CAP. VI.

Conseguenze che traggonsi dal precedente Capitolo per la riduzione de' fratti.

78. Essendo $\frac{P \pm Q}{V} = \frac{P}{V} \pm \frac{Q}{V}$ (74) si vede che: *Tutte le volte che s' incontrano nel calcolo fratti dello stesso denominatore, la loro somma, e 'l residuo di essi se eran due, si ottiene col sommare o sottrarre i loro numeratori, conservandovi quel denominatore comune.*

79. Or tutti i fratti che non hanno un comune denominatore, sono suscettivi di averlo; e per conseguenza nel sommarli insieme, o nel sottrarre l' un dall' altro, potrà sempre aver luogo la sopraddetta riduzione di fratti. Di fatti sieno $\frac{M}{N}$ e $\frac{P}{Q}$ i fratti proposti: si potrà inserire nel numeratore e denominatore del primo il fattore Q dinotato dal denominatore dell' altro fratto, senza che si alteri il valore di quello (29); e viceversa si potrà inserire nel numeratore e denominatore del secondo fratto il fattore N dinotato dal denominatore del primo, senza alterare il valore di questo secondo fratto. Ed è poi chiaro, che per tale operato i due fratti che si otterranno, avranno per comune denominatore il prodotto de' denominatori de' fratti dati; e che saranno i seguenti $\frac{MQ}{NQ}$, $\frac{PN}{NQ}$. Adunque estendendo mano mano questa riduzione a più fratti

dati, e deducendone la regola generale per eseguirla; sarà questa la seguente.

80. *Per ridurre due o più fratti di diverso denominatore ad altrettanti dello stesso denominatore, ed uguali rispettivamente a' proposti; bisogna prendere per comune denominatore de' fratti ridotti il prodotto de' denominatori de' fratti dati; e 'l numeratore di ognun di questi sarà espresso dal prodotto del numeratore del fratto dato corrispondente ad esso pe' denominatori di tutti gli altri fratti dati.*

Così se fossero dati i fratti

$$\frac{M}{N} \quad \frac{P}{Q} \quad \frac{R}{S}$$

i loro corrispondenti fratti ridotti saranno

$$\frac{MQS}{NQS} \quad \frac{PNS}{NQS} \quad \frac{RNQ}{NQS}$$

81. Che se i fratti ridotti fossero stati della seguente forma $\frac{MQ}{NQ}$ e $\frac{P}{Q}$, ne' quali il denominatore del primo tien per fattore quello dell' altro, è chiaro che per ridurli allo stesso denominatore basterà semplicemente il moltiplicare i termini del secondo fratto pel quoziente N che si ha dividendo il denominatore NQ per l' altro Q.

82. E s' intende poi facilmente, che volendo ridurre un intero allo stesso denominatore di un fratto, bisognerà multiplicare l' intero per quel denominatore; sicchè volendo sommare insieme quell' intero e 'l fratto o pur sottrarre l' un di essi dall' altro, si perverrà a questo risultamento dopo di aver eseguita la poc' anzi detta riduzione.

Così l' intero M e 'l fratto $\frac{P}{Q}$ presi insieme corri-

spondono all' espressione $\frac{MQ+P}{Q}$. Ed al contrario se si fosse ottenuto in seguito di una calcolazione una espressione della forma poc' anzi detta; eseguendo la divisione del numeratore per lo denominatore finchè è possibile (76) si tornerebbe ad avere l'intero M, e il fratto $\frac{P}{Q}$. E ciò serve di complemento a quello che fu detto intorno alla divisione nel n. 76.; facendo vedere, che tutte le volte, che la divisione dopo essersi continuata fino ad un certo segno, viene ad arrestarsi, ciò dinota, che il dividendo era una espressione la quale risultava dal riducimento di un intero e ratto tutto a fratto: che perciò si completerà l'espressione equivalente a tal divisione, cioè al quoziente di essa, aggiungendo a quello di già ottenuto la frazione che ha per numeratore il residuo di quella divisione, e per denominatore il divisore proposto.

83. Or posto che non si altera il valore di un fratto distruggendo ne' suoi termini i fattori comuni, se ve ne sieno, sebbene ognun comprende che per tale operazione esso si renda più semplice; si vede perciò chiaramente, che esso prenderà la forma semplicissima di cui è suscettivo, allorchè siensi a dirittura distrutti tutti i fattori comuni a' suoi termini; cioè quando il suo numeratore e denominatore siensi divisi pel prodotto di tutti i fattori che loro sono comuni, il qual prodotto dicesi *Massimo comun divisore*: che perciò la ricerca di questo massimo comun divisore è di estrema importanza nel calcolo algebrico; poichè per mezzo di essa talune espressioni frazionarie possonsi presentare nel calcolo in forma semplicissima; il che è di non poca importanza ad ottenersi. Ed in generale qui avvertiremo di passaggio, che non conviene mai nel

calcolo algebrico tralasciare di eseguire tutte quelle riduzioni delle quali una formola è suscettiva, e che rendono il progresso della calcolazione più semplice.

84. La stessa definizione del massimo comun divisore basta a mostrare il modo da rinvenirlo nelle quantità monomie; poichè è chiaro che si otterrà prendendo tutti i fattori comuni ad esse, che sono facili a ravvisarsi, e multiplicandoli tra loro. Così il massimo comun divisore tra le quantità

$$3a^2x^5y \quad e \quad 12a^4x^5q$$

è evidentemente $3a^2x^5$, ch'è il prodotto de' fattori $3, a^2, x^5$ comuni a quelle quantità proposte.

85. Nel caso poi che le quantità tra le quali si vuole il massimo comun divisore fossero polimonie, i principj su cui è sfondata l'anzidetta ricerca sono i seguenti

86. I. *Se una quantità divide esattamente due altre quantità, deve anche dividere esattamente il residuo della divisione dell' una di quelle per l' altra.*

Cioè sieno M, N quelle quantità, ed N dividendo M dia per residuo R; sia poi D il divisore comune di M ed N; dovrà esserlo anche di R.

Imperocchè chiamando Q il quoziente della divisione di M per N, sarà per la natura di questa operazione. $M=NQ+R$; e quindi $M-NQ=R$ ed $\frac{M-NQ}{D}=\frac{R}{D}$.

Ma il primo quoziente supponesi esatto, poichè le M ed N sono divibili per D (74). Adunque dovrà essere anche esatto il quoziente di R per D.

E questo principio, come tra poco si vedrà, è fondamentale per la ricerca del massimo comun divisore.

87. II. *Non si altera il comun divisore di due quan-*

tità date, se l'una di esse si moltiplichi o pur si divida per quantità che non sia fattore dell'altra.

Il qual principio che serve al condu imento a fine dell'operazione per la ricerca del massimo comun divisore, è un' immediata conseguenza della definizione del medesimo.

Così il comun divisore tra le quantità MNQ, MNP è MN; e continua ad esser tale introducendolo in una di esse la X per fattore, e nell'altra la Y; sicchè divengano rispettivamente MNQX, MNPY. E continuerà pure ad esser lo stesso MN il massimo comun divisore, se in queste quantità si distrugga nella prima il fattore Q, e nella seconda l'altro P, sicchè divengano MNX, MNY.

88. Ciò premesso sieno A e B le quantità tra le quali si cerchi il massimo comun divisore; e divisa A per B, si abbia per quoziente Q, e per residuo R: per cui dividasi B per R, e si abbia di nuovo per quoziente Q' e per residuo R': dovrà lo stesso comun divisore esserlo anche di R ed R': che perciò dividasi R per R', e si abbia il quoziente Q'' e 'l residuo R''; dovrà tra questo residuo e 'l precedente R' esservi anche lo stesso comun divisore che tra A e B; e così successivamente. Or se avvenga che quell' ultimo residuo R'' sia zero, allora il comun divisore tra R, R' doveva essere lo stesso R': ed è facile il comprendere, ch' esso debba essere il massimo che vi sia tra quelle grandezze: che perciò sarebbe questo il massimo comun divisore tra A e B.

89. E dal ragionamento tenuto nel precedente numero si ricaverà facilmente la seguente

REGOLA

PER LA RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE.

90. *Volendo il massimo comun divisore tra due espressioni date, bisogna dividere l' una di esse per l' altra, e poi questa pel residuo, ed indi questo residuo pel nuovo residuo, e così successivamente, finchè ottengasi per ultimo residuo il zero, nel qual caso l' ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato tra le quantità date.*

91. E se mai avvenga, che dopo un certo numero di quelle divisioni successive giungasi a tal residuo, che non possa affatto dividere quello che lo precede, sarà questo il segno che le quantità proposte non abbiano comun divisore.

92. Conviene avvertire per riguardo alla regola di sopra data, che ogni qual volta si ravvisi in una delle espressioni che fa da dividendo o da divisore un qualche fattore di essa che non lo sia dell' altra, converrà talvolta supprimerlo, per render più semplice l' operazione. Ed al contrario tutte le volte che si osservi che nel cominciar qualche una della successive divisioni, non si possa esattamente dividere il primo termine del dividendo per lo primo del divisore, converrà per tal oggetto introdurre per fattore nel dividendo quella quantità che rende fattibile tal divisione. Le quali cose lo mostreranno assai meglio i seguenti esempj

93. ESEMPIO I.

	$a^3+ca^2-ab^2-b^2c$	Quantità date		$a^3+bca-ab^2+b^2c-bc^2-ac^2$
		Quoz. 1		$a^3+ca^2-ab^2-b^2c$
	$a^3-ba^2-2ab^2+bca+a^2c$		I. Res.	$-ca^2+bca+2b^2c-bc^2-ac^2$
II. Res.	$+ba^2+ab^2-b^2c-bca$		div. per c	$-a^2+ba+2b^2-bc-ac$ (Divis.
div. per b.	$a^2+ab-bc-ca$	Divis.		Quoz. $-a$
		Quoz. -1.		$-a^2-ba+bc+ac$
	$a^2+ab-bc-ca$		III. Res.	$2ba+2b^2-2bc-2ac$
IV. Res.	0		cioè	$-(2c-2b)(a+b)$

ove supprimendo il fattore $-(2c-2b)$, e quindi dividendo il precedente residuo per

$$a+b$$

si ha per . . . . Quoz. $a-c$

Adunque $a+b$ è il massimo comun divisore cercato.

SPIEGA DELLA PRECEDENTE OPERAZIONE.



94. I. Si è divisa l' una della quantità date, quella sinistra per l' altra a destra, e si è ottenuto per quoziente 1, del quale non si tien conto, come anche de' seguenti, che perciò non nomineremo; e per residuo

$$-ca^2+bca+2b^2c-bc^2-ac^2$$

nel quale si è soppresso il fattore c, che non moltiplica l' altra espressione data (87), sicchè esso è divenuto

$$-a^2+ba+2b^2-bc-ac$$

pel quale si è divisa l' altra espressione data, cioè quella a destra; dalla qual divisione n' è risultato il II°. Residuo

$$ba^2+ab^2-b^2c-bac$$

nel quale si è suppresso il fattore b, e poi si è per esso diviso il precedente residuo, e si è così ottenuto per III°. residuo

$$2ba+2b^2-abc-2ac$$

cioè, scindendolo in fattori

$$-(2c-2b)(a+b)$$

E suppresso in questa espressione il fattore $-(2c-2b)$, si è diviso il secondo residuo per $a+b$. E poichè da tal divisione n' è risultato il residuo zero; perciò $a+b$ il è massimo comun divisore cercato.

95. La presente operazione avrebbe anche potuto terminare dopo ottenuto il II°. residuo, se si fosse allora riflettuto, che questo poteva scindersi ne' fattori $ab-bc$ ed $a+b$, nel qual caso suppresso il fattore $ab-bc$, si sarebbe trovata esattamente eseguibile la divisione del I°. residuo per $a+b$; e perciò $a+b$ si sarebbe veduto fin da questo punto essere il massimo comun divisore tra le espressioni date. E ciò serve a mostrare di quanta importanza sia ad abbreviare la ricerca del massimo comun divisore il considerar bene le quantità su cui si operano le divisioni, per liberare a tempo l'una di esse da que' fattori monomj, o polimonj, che non affettano l'altra.

96. ESEMPIO II.

$$a^2h^2+afdg-d^2g^2+a^2fh \quad \Big\} \text{ Quantità date } \Big\{ \quad a^2fh+a^2f^2+ahdg-d^2g^2$$

si mult. per h

Quoz. $\frac{f}{h}$

$$a^2fh^2+a^2f^2h+ah^2dg-d^2g^2h$$
$$a^2fh^2+afhdg-d^2g^2f+a^2f^2h$$

1. Res. $\quad +ah^2dg-d^2g^2h-af^2dg+d^2g^2f$

div. per dg $\quad ah^2-dgh-af^2+dgf$

Quoz. f

cioè $\quad (ah+af-dg)\ (h-f)$

in cui soppresso il fattore $ah+af-dg$, e continuando a dividere per $h-f$ l'altra quantità data, ossia il precedente divisore, il residuo zero che ne risulta dinoterà che $h-f$ sia il massimo comun divisore cercato.

ALITER

$a^2fh+a^2h^2+afdg-d^2g^2$	*Quantità date*	$a^2fh+a^2f^2+ahdg-d^2g^2$
	Quoz. 1	$a^2fh+a^2h^2+afdg-d^2g^2$
	1. *Res.*	$a^2f^2-a^2h^2+ahdg-afdg$
	cioè	$-a^2(h^2-f^2)+adg(h-f)$
	ossia	$-a^2(h+f)(h-f)+adg(h-f)$
	o pure	$-a(ah+af-dg)(h-f)$

che perciò supprimendo il fattore $-a(h-f)$ e dividendo il divisore precedente per $ah+af-dg$, si vedrà come sopra, esser questa quantità il massimo comun divisore cercato.

97. Per la spiega della precedente operazione non occorre di far notare altro, se non che nella prima maniera come è stata eseguita, per l'ordinamento dato al divisore, essendo risultato il quoziente frazionario $\frac{h}{f}$, si è introdotto nella quantità presa per dividendo il fattore f, affin di rendere il quoziente di tal divisione un intero.

98. ESEMPIO III.

Quant. date

$$agc-bgc+agd-bgd+alc-blc+ald-bld$$
cioè $(gc+gd+lc+ld)(a-b)$
$$adc-dcb+afc-fbc+ad^2-bd^2+adf-bdf$$

Or supprimendo il primo fattore del divisore, si troverebbe che la quantità proposte scelta per dividendo sarebbe esattamente divisibile per $a-b$, ciò non ostanto non sarebbe questo il massimo comun divisore tra le due quantità date, mentre tra quel dividendo e l'altro fattore $gc+gd+lc+ld$ vi esiste ancora il fattore comune $c+d$, che perciò il massimo comun divisore tra le quantità date sarà $(a-b)(c+d)$, cioè $ac+cd-bc-bd$. E ciò serva di complemento a quanto fu detto in fine del n.° 95., perchè non si abbia da' giovani a l errare.

99. Avvertasi pure che ciò che è stato praticato nel n.° 96. riguardo all'apparecchiare il dividendo nella ricerca del massimo comun divisore, può tralasciarsi di fare, senza che risulti altro inconveniente che quello di aver de' fratti nel proseguimento dell'operazione. Di fatti se le espressioni date fossero

$$x^3+4x^2+5x-2$$
e
$$-2x^2+5x-3$$

Eseguendo la divisione della prima di esse per la seconda si ha per quoziente $\frac{-x}{2}$, che multiplicato pel divisore e sottratto tal prodotto dal dividendo, dà per residuo

$$\frac{-3x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 2$$

che continuato a dividere per lo stesso divisore, e quindi il suo primo termine per $-2x^2$, si ha per quoziente $\frac{3}{4}$, e poi l' altro residuo

$$\frac{-x}{4} + \frac{1}{4}$$

ossia $-x + 1$ supprimendo in esso il fattore $\frac{1}{4}$. E dividendo il divisore di poc' anzi per quest' ultimo residuo; dal nuovo residuo zero derivante da questa divisione, si rileverà che sia $-x+1$ il massimo comun divisore tra le quantità proposte.

100. E tutte le cose finora dette sembranmi sufficienti avvertenze per le operazioni a fare nella ricerca del massimo comun divisore: l' esercizio poi nelle operazioni algebriche le immedesimerà nell' animo de' giovani, e gli farà conoscere senza stento i diversi ripieghi che dovranno adoperare secondo le circostanze diverse.

CAP. VII.

USO DELLA DIVISIONE NELLO SVOLGIMENTO DI UN FRATTO IN SERIE.

101. Sia il fratto $\frac{a}{b+c}$, che come è noto dal n.° 18, può considerarsi come il risultamento della divisione di a per $b+c$; ed una tal divisione si esegua come se il dividendo rappresentasse un polinomio in cui tutti i termini fuorchè a si sono distrutti tra loro per l'opposizione de' segni; e quindi adattandovi la Regola del n. 76, si avrà

Divis. $b+c$ *Div.* a

$$Q.\ \frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}+\text{ec.}$$

$$a+\frac{ac}{b}$$

I.° *Res.* $-\frac{ac}{b}$

$$-\frac{ac}{b}-\frac{ac^2}{b^2}$$

II. *Res.* $+\frac{ac^2}{b^2}$

$$+\frac{ac^2}{b^2}+\frac{ac^3}{b^3}$$

III. *Res.* $-\frac{ac^3}{b^3}$

per quoziente la successione de' termini . . . . . .

$$\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \text{ec.}$$

che come tra poco vedremo precedono con una legge costante, cioè in modo che ognuno si può formare dal precedente nel modo stesso; e che chiamasi *Serie*.

102. Or la semplice ispezione di quel quoziente fa vedere, che il suo primo termine risulta dal dividere il numeratore a del fratto dato pel primo termine b del donominatore; che il secondo termine $\frac{ac}{b^2}$ si ottiene del primo multiplicandolo per $\frac{c}{b}$, cioè pel quoziente della divisione del secondo termine di quel denominatore pel primo di essi, e così mano mano il terzo, il quarto termine, ec. si ottengono sempre multiplicando il loro precedente già ottenuto per $\frac{c}{b}$. I segni poi di que' termini del quoziente si vanno alternando da $+$ in $-$, or che il secondo termine del binomio divisore è positivo, e si sarebbe trovato esser essi tutti positivi, se quel secondo termine fosse stato negativo. Sicchè per tal modo si vede come possa facilmente ottenersi quel quoziente, senza nè meno eseguir la divisione.

103. Or siccome il dividendo, nell' operazione di sopra effettuata, e poi ciascun residuo, che fa sempre da dividendo, è un monomio, e che il divisore è un binomio, e perciò anche tale è il prodotto di esso per ogni quoziente parziale, che deve sottrarsi dal corrispondente dividendo, ne segue perciò, che di

tal prodotto distruggendosene con la sottrazione dal corrispondente dividendo un solo termine, ne debba restar sempre per residuo un altro; ond'è che tal divisione non si arresterà mai; sicchè quella serie di quozienti progredirà all'infinito; il che ha fatto dare a questo sviluppo del fratto la denominazione di *divisione all'infinito*.

104. Ed è pure facile a rilevarsi, che se quel fratto $\frac{c}{b}$ pel quale moltiplicandosi ciascun termine del quoziente, si ottiene l'altro seguente, sia un fratto vero, allora ciascun termine del quoziente diverrà sempre minore del precedente; e la serie esprimente quel quoziente si dirà *convergente*. Che se al contrario quel multiplicatore costante sia un fratto spurio o un intero, que' termini andranno sempre crescendo, e la serie si dirà *divergente*. Ed è pur chiaro, che tanto più convergente diverrà quella serie, quanto più piccolo diventi quel fratto $\frac{c}{b}$.

105. Ciò posto, supponghiamo che $a=b=x=1$, sicchè il fratto proposto $\frac{a}{b+x}$ sia in questo caso $\frac{1}{2}$; in tal caso quello sviluppo del fratto si cambierà in

$$1-1+1-1+1-\text{ec.}$$

nel quale si vede, che arrestando la serie ad un numero pari di termini, si ha per loro somma 0; e se di essi se ne prenda un numero impari, il risultamento sarà $+1$: che perciò non si vede a prima vista come possa quello sviluppo rappresentare il fratto $\frac{1}{2}$ dal quale è nato. Ma se riflettasi, che dopo qualsivoglia numero di quozienti ottenuti per mezzo della divisione di 1 per $1+1$

vi resta sempre un residuo ∓ 1, col segno $-$ se i quozienti erano di numero impari, $+$ se pari; e che volendo arrestar la divisione, conviene aggiungere a quel quoziente il fratto di quest' ultimo residuo pel divisore $1+1$, cioè $\mp \frac{1}{2}$; si resterà subito convinto, che per tal modo lo sviluppo di sopra recato pareggi effettivamente $\frac{1}{2}$, cioè il fratto prposto.

105. Or snppongasi esser l' $a=b=1$, e 'l $c=-1$, sicchè il fratto proposto diventi $\frac{1}{0}$, e 'l suo sviluppo sia

$$1+1+1+1+1+1+1+1+\text{ec},$$

all' infinito, cioè l' infinito stesso, tale essendo il risultamento della somma continuata di un' unità che non si arresta mai; che perciò si vede che la rappresentazione dell' infinito può effettuarsi per mezzo dell' unità, o di qualunque grandezza M divisa pel zero. Ma su questa nozione, che quì è fuori luogo, riverremo in appresso, per farla meglio comprendere.

107. Finalmente sia $a=b=1$, e $c=-\frac{1}{2}$ sicchè il fratto proposto sia $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$; e lo sviluppo di esso venghi rappresentato da

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\text{ec.}$$

in cui ciascun termine, come si vede è metà del precedente, ed è maggiore di tutti i seguenti termini all' infinito, della qual considerazione dovremo valerci altrove, sicchè non si debba giudicar fuor di proposito di averla quì stabilita.

108. Potrebbesi anche per mezzo della divisione

sviluppare in serie infinita ogni fratto nel cui numeratore vi sia almeno un termine di meno che nel denominatore, e stabilire la legge onde progrediscono i termini del quoziente; ma basti per ora ciò che se n'è esposto intorno al presente argomento, sul quale dovremo rivenire in appresso, per trattarlo più generalmente, e con maggior estensione.

CAP. VIII.

Delle Frazioni continue.

---

109. Siccome è nostro intendimento, che gli Elementi di Algebra, che ora diamo, menino per diritta via alle ricerche, che dovremo poi stabilire nell' Introduzione all' Analisi degl' Infiniti, che forma il III. Volume del presente Corso; così abbiamo stimato non fuor di proposito di abbozzar qui i principj generali della teoria delle frazioni continue, che ivi poi avremo occasione di ripigliare e terminare. Nè questa idea di trattar delle frazioni continue, per la parte loro elementare, nell' Algebra de' Finiti è nuova; ma essa trovasi adottata in quasi tutte le migliori Istituzioni di Sommi Analisti Moderni. Ad ogni modo ci saremo abbastanza giustificati per avervela introdotta, quando non la lasceremo senza applicazione in appresso nel presente Trattato.

110. Sia il fratto vero $\frac{m}{n}$; ed in esso si divida pel numeratore m ciascuno de' suoi termini, si avrà

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\frac{n}{m}}$$

ove $\frac{n}{m}$ essendo un fratto spurio, sia perciò uguale

a $q+\frac{r}{m}$. Eseguendo la divisione, sarà

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{q+\cfrac{r}{m}}$$

Similmente dividendo nel fratto $\frac{r}{m}$ ciascun de' termini per r, sarà $\frac{r}{m}=\frac{1}{\frac{m}{r}}=\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r}}$, supponendo che la m divisa per la r dia per quoziente q', e per residuo r'; ond'è che si avrà

$$\frac{m}{r}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r}}}$$

E continuando la stessa operazione sul fratto $\frac{r'}{r}$, chiamando q'' il nuovo quoziente, ed r'' il nuovo residuo, si avrebbe

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{r''}{r'}}}}$$

e così in seguito.

111. Or ogni specie di espressione frazionaria di questa fatta, o anche più generale

$$\cfrac{a}{q+\cfrac{b}{q'+\cfrac{c}{q''+\cfrac{d}{q'''+\cfrac{e}{q''''}}}}}$$

nella quale espressamente il denominatore della prima quantità intera è un binomio di una parte intera e di un' altra frazionaria, la quale anch' essa costa di una parte intera e di un' altra frazionaria, e così in seguito, si dice *Frazione continua*.

112. Noi qui non considereremo che semplicemente le frazioni continue della prima forma di sopra esibita; poichè quelle sole occorrono frequentemente nell' Analisi, ed anche perchè dalle ricerche che si stabiliscono su questo caso particolare, è facil cosa il passare a quello più generale.

113. È facile il comprendere, che se invece di prendere per q, q', q'', q''' ec. i massimi numeri interi contenuti ne' fratti $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{r}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{r'}{r''}$ ec. si fosse preso per ognun di essi il numero di un' unità maggiore, e quindi il primo a superare que' fratti stessi, allora i residui delle divisioni, cioè r, r', r'', r''' ec. avrebbero dovuti risultar negativi, e la frazione continua avrebbe avuta la seguente forma

$$\cfrac{1}{q-\cfrac{1}{q'-\cfrac{1}{q''-\cfrac{1}{q'''}}}}$$

Ed è pur chiaro che prendendo taluni di que' q, q', q'', q''' ec. per difetto, ed altri per eccesso, risulterebbero positivi que' valori de' q', q'', q''' ec. corcorrispondenti a que' primi casi, e negativi pe' secondi; talchè se q' si era preso maggiore di un' unità del quoziente intero del fratto corrispondente, l' $\frac{1}{q''}$, sarebbe negativo.

114. Dall' andamento stesso di una frazione continua risulta chiaramente, ch' essa offre continuamente una approssimazione del valore del fratto ordinario che rappresenta; poichè non si fa altro, per ottenerlo che prendere continuamente i valori in intero più prossimi a quel fratto proposto, ed alle altre frazioni successive in cui esso si svolge con l' operazione indicata nel n.° 110. Sicchè diviene importante il conoscere un tal genere di operazioni approssimative delle quantità frazionarie, e delle irrazionali ancora, come si vedrà in appresso, l' idea felicissima delle quali devesi all' Inglese *Brounker*, che il primo ne usò per la quadratura del cerchio (*).

(*) *Montucla* — Histoire des Matematiques Part. IV. Lib VI. Sez. II.

115. Dall' esposto nel n.° 110. si rileva anche, che l' operazione da farsi per lo svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua sia precisamente la stessa che quella della ricerca del massimo comun divisore tra il numeratore e 'l denominatore del medesimo, tenendo però precisamente conto in quell' operazione di que' quozienti q, q', q'', q''' ec. delle successive divisioni che debbon farsi, i quali disprezzavansi nell'altra.

116. Sicchè volendo svolgersi in frazione continua il fratto $\frac{11}{14}$ (*), bisognerà dividere

14 per 11, e sarà $q = 1$, $r = 3$;
11 per 3, che darà $q' = 3$, $r' = 2$
3 per 2, che dà $q'' = 1$, $r'' = 1$
2 per 1, donde si ha $q''' = 2$, $r''' = 0$.

E la frazione continua richiesta sarà

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

E da ciò ognuno potrà da se medesimo rilevare la regola per lo svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua.

117. Or siccome nella ricerca del massimo comun divisore tra due numeri, deve sempre pervenirsi ad un residuo che divide esattamente il precedente, il

(*) Un tal fratto esprime, com' è noto, il rapporto dell' aja di un cerchio al quadrato del diametro, secondo Archimede.

quale nell' estremo caso sarà l' 1 : perciò si vede chiaramente, che nello svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua, l' operazione debba una volta arrestarsi. E di fatti in quella recata nel numero precedente essa si è arrestata al quoziente q''', cioè alla quarta divisione.

118. Adunque ogni frazione continua derivante da un fratto ordinario deve esser terminata. Non così di quelle che derivano da quantità irrazionali, che come vedremo in appresso sono infinite.

119. Dopo aver considerato il Problema diretto di svolgere un fratto ordinario in frazione continua, ci resta ora a vedere come si pervenga alla risoluzione dell' altro inverso, col quale si propone a ridurre in fratto ordinario una frazione continua proposta.

Or a prima vista ognun s' accorge che data una frazione continua, tal che quella di poc' anzi

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

limitandosi sino al secondo denominatore, cioè ad $\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}$,

essa diventi $\cfrac{1}{\frac{3+1}{3}} = \frac{3}{4}$; e che tenendo conto del

seguente denominatore $+ \frac{1}{1}$ essa sia $= \cfrac{1}{1+\frac{1}{4}} =$

$\cfrac{1}{\frac{4+1}{4}} = \frac{4}{5}$, più prossima al fratto ordinario cercato,

che non era la precedente. E volendo introdurre in

calcolo anche il seguente denominatore $\frac{1}{a}$, che nel nostro caso è l' ultimo, si vedrà la proposta frazione continua corrispondere precisamente ad $\frac{11}{14}$, come l' era già noto.

121. Ma per facilitare l' operazione poc' anzi esposta del riducimento di una frazione continua in fratto ordinario, convien determinar la legge onde procedono le frazioni volgari provvenute successivamente da una frazione continua; poichè allora ottenuta quella di un grado, si potrà subito ottenere l' altra del seguente, che è più approssimante della precedente.

Per ottener ciò, sia la frazione continua

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}}$$

sarà

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}} = \frac{b}{ab+1}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} = \frac{bc+1}{abc+a+c}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}} = \frac{bcde+be+de+bc+1}{abcde+abe+ade+cde+abc+c+a+e}$$

per le quali frazioni facilmente si ravvisa la seguente legge che fa dipendere ciascuna dalle due precedenti, cioè

122. *Ciascun numeratore si ottiene aggiungendo all' antiprecedente ad esso il precedente moltiplicato per la lettera o quantità che esprime l' ultimo denominatore nella frazione continua da ridursi.*

Così arrestandosi al quoziente d, si otterrà il numeratore del fratto corrispondente alla frazione con-

tinua
$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$
aggiugnendo al numeratore b dell' antiprecedente frazione l'altro $bc+1$ della precedente moltiplicato per d. *E la stessa legge avrà luogo per la formazione de' respettivi denominatori.*

123. Ma per dimostrar vera una tal legge generalmente, passeremo a far vedere, che supponendosi ch' essa abbia luogo fino alla frazione corrispondente ad un certo denominatore della frazione continua, debba necessariamente aver anche luogo per la frazione seguente, e quindi per tutte le frazioni, fino a quella che si vuole, e ch' è l' ultima.

Sien dunque q, q', q'', q'''...... $q^{n-''}$, $q^{n-'}$, q^n i denominatori successivi della frazione continua, e sieno $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'''}{b'''}$ ...... $\frac{a^{n-''}}{b^{n-''}}$, $\frac{a^{n-'}}{b^{n-'}}$, $\frac{a^n}{b^n}$ le frazioni volgari successive provvenute da questa frazione continua fino a' rispettivi denominatori q, q' ec. Si avrà (121)

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q}$$
$$\frac{a'}{b'}=\frac{q'}{qq'+1}$$
$$\frac{a''}{b''}=\frac{q'q''+1}{qq'q''+q''+q}=\frac{a'q''+1}{b'q''+b}$$

124. E similmente

$$\frac{a'''}{b'''} = \dots\dots\dots\dots \frac{a''q'''+a'}{b''q'''+b'}$$

$$\frac{a''''}{b''''} = \dots\dots\dots\dots \frac{a'''q''''+a''}{b'''q''''+b''}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a^{n-'}}{b^{n-'}} = \dots\dots\dots\dots \frac{a^{n-''}q^{n-'}+a^{n-'''}}{b^{n-''}q^{n-'}+b^{n-'''}}$$

Or io dico che la frazione seguente, che corrisponde alla frazione continua fino al denominatore q^n cioè l' $\frac{a^n}{b^n}$ debba necessariamente essere espressa secondo la legge stessa delle precedenti da $\frac{a^{n-'}q^n+a^{n-''}}{b^{n-'}q^n+a^{n-''}}$.

Di fatti quella frazione penultima $\frac{a^{n-'}}{b^{n-'}}$, si tramuta in quest' ultima $\frac{a^n}{b^n}$, quando si sostituisca in quella in vece di $q^{n-'}$ la $q^{n-'}+\frac{1}{q^n}$, che perciò sarà

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\left(q^{n-'} + \frac{1}{q^n}\right) a^{n-''} + a^{n-'''}}{\left(q^{n-'} + \frac{1}{q^n}\right) b^{n-''} + b^{n-'''}}$$

$$= \frac{a^{n-''} q^{n-'} + \frac{1}{q^n} a^{n-''} + a^{n-'''}}{b^{n-''} q^{n-'} + \frac{1}{q^n} a^{n-''} + b^{n-'''}}$$

$$= \frac{a^{n-'} + \frac{1}{q^n} a^{n-''}}{b^{n-'} + \frac{1}{q^n} b^{n-''}}$$

espressione che consente con la legge di sopra stabilita, che perciò resta una tal legge generalmente dimostrata.

125. Risulta ancora evidentemente dalle anzidette cose, che tutte le frazioni volgari, che pareggiano la frazione continua a diversi gradi di essa debbano essere irriducibili, cioè debbano avere i loro termini primi tra loro; potendo solamente non esserlo l'ultima di quelle, la quale rappresenta l'intera frazione continua terminata, nel caso che questa fosse derivata da un fratto suscettivo di riducimento a minimi termini.

126. Col metodo stesso del n.° 115. si potrà ridurre in frazione continua qualunque quantità radicale

purchè però essa siasi prima svolta in decimale (*). Ma siccome tal valore in decimali non può essere che approssimativo, talchè accrescendosi di 1 l'ultima cifra del decimale si hanno due limiti tra i quali deve trovarsi il valor vero della quantità proposta, bisognerà perciò, per contenersi tra questi limiti, eseguire lo sviluppo in frazione continua sulle due frazioni che rappresentano tali limiti, e non prender per termini della frazione continua cercata, che solamente quelli che risultano identici in que' due sviluppi.

127. Così se vogliasi svolgere in frazione continua $\sqrt{2}$, che ridotto in decimale è 1,4142135........, si vedrà che arrestandosi solo a quattro cifre di quel decimale, cioè ad 1,4142, i limiti del fratto da svilupparsi cioè della frazione continua corrispondente a $\sqrt{2}$ saranno 1,4142 e 1,4143. Or il primo di que' fratti dà la frazione continua

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}$$

e l'altro si svolge nella seguente

(*) E lo stesso potrebbe anche aver luogo per una qualunque quantità di quelle che in appresso considereremo nel Corso di Analisi Sublime, conosciute col nome di *trascendenti*.

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

le quali due frazioni continue sono differenti tra loro nel quinto loro termine; sicchè, se la frazione continua corrispondente a $\sqrt{2}$ si volesse svolgere al di là del quarto termine, allora non basta arrestare a diecimilesimi il fratto decimale rappresentante $\sqrt{2}$; ma bisogna svilupparlo oltre.

128. Ma lo sviluppo di un radicale in frazione continua si può anche ottenere senza aver bisogno della riduzione di quel radicale in frazione decimale, su di che noi qui ci limiteremo semplicemente a quello di $\sqrt{2}$, rimettendo altrove il compimento di questa ricerca, stimando di aver già detto quanto può per ora bastare ad un'esatta conoscenza di talune quantità derivanti dalla divisione, e fuori luogo il dirne di vantaggio.

129. Sia $\sqrt{2}=1+\frac{1}{z}$ sarà $\frac{1}{z}=\sqrt{2}-1$, e quindi $z=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ (68) $=2+\frac{1}{z}$; sicchè per ora sarebbe $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{z}}$; e continuando a sostituir sempre per z lo stesso suo valore poc'anzi determinato, si vedrebbe il $\sqrt{2}$ svilupparsi in una frazione

continua *periodica* tal che quella esposta al n.° 127.

130. E volendo tradurre in fratti ordinarj le frazioni continue di diverso grado esprimenti $\sqrt{2}$, per ottener così diversi gradi di approssimazione di un tal radicale, si troverà che essi sieno i seguenti

$$1+\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \frac{70}{169},\ \text{ec.}\right]$$

cioè $\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169}$, ec.

le quali frazioni ridotte in diecimilionesime, e paragonate col fratto decimale di ugual grado $1,4142135 = \sqrt{2}$ daranno

I.° $\frac{3}{2} = 1,5000000$ *differenza in più*

II.° $\frac{7}{5} = 1,4000009$ ———— *in meno*

III.° $\frac{17}{12} = 1,4166667$ ———— *in più*

IV.° $\frac{41}{29} = 1,4137931$ ———— *in meno*

V.° $\frac{99}{70} = 1,4142857$ ———— *in più*

VI.° $\frac{239}{169} = 1,4142012$ ———— *in meno*

VII.° $\frac{577}{408} = 1,4142156$ ———— *in più*

VIII.° $\frac{1393}{985} = 1,4142132$ ———— *in meno*, ma nell'ultima cifra decimale.

131. Ed è poi chiaro che la frazione continua in cui si sviluppa $\sqrt{2}$ non debba mai terminarsi, come l'è in generale di tutte quelle che derivano da quantità radicali. Ma a dimostrar generalmente un tale assunto noi v'impiegheremo i seguenti uumeri.

LEMMA.

132. *Il prodotto di due, tre, o più numeri primi* (*) *non può avere per fattori altri numeri primi diversi da quelli.*

Sieno n, m numeri primi, che diano il prodotto nm, di cui si supponga anche fattore il numero primo p: dico che p sarà necessariamente o uguale ad m, o ad n.

Essendo p un divisore esatto di mn, sia q il quoziente di questa divisione, sarà $\frac{mn}{p} = q$, e quindi $\frac{n}{p} = \frac{q}{m}$: ma essendo n e p numeri primi, la frazione $\frac{n}{p}$ è ridotta a' suoi minimi termini; quindi i termini dell'equivalente $\frac{q}{m}$ o debbono essere uguali rispettivamente a quelli delle frazione $\frac{n}{p}$, o rispettivamente egual multiplici di questi: ma q non può essere un multiplice di n, poichè numero primo; adunque gli sarà uguale, e perciò anche p ad m.

(*) Ciò che s'intenda per numero primo è già noto dall'Aritmetica.

Sieno ora tre i fattori primi del prodotto mnx, cioè m, n, x; e suppongasi benanche esser p un numero primo divisore di mnx, e sia $\frac{mnx}{p} = q$, sarà $\frac{mn}{p} = \frac{q}{x}$. Or nel fratto $\frac{mn}{p}$ essendo primi i numeri m, n, p non vi può essere comun divisore tra mn e p, che perciò esso è ridotto a minimi termini: e nell' altro $\frac{q}{x}$ essendo x numero primo, non può essere un multiplice di p. Adunque dovrà essere $x = p$ e $q = mn$. E nel modo stesso si continuerebbe la dimostrazione per un più gran numero di fattori.

133. *Cor.* I. Quindi il prodotto di più numeri primi deve esser primo per riguardo al prodotto di altri numeri primi diversi da' precedenti.

134. *Cor.* II E perciò i quadrati di due numeri primi debbono essere numeri primi tra loro. Ed in generale tali debbono esse e le potenze n de' medesimi.

TEOREMA.

135. *Se la radice di un numero intero n m è un intero, (*), non potrà nè tampoco essere un fratto.*

S' è possibile il sia in quest' ultima modo, e tal fratto ridotto a' termini venghi espresso da $\frac{p}{q}$, sarà $\frac{p^n}{q^n} = a$ supposto essere a il numero dato, ed n il

(*) Cioè se esso non è potenza esatta del grado della radice che se ne vuole estrarre.

grado della radice estratta, ed espressa da $\frac{p}{q}$. Ma essendo numeri primi p e q, sono anche primi tra loro p^n e q^n; che perciò q^n non potrà mai dividere esattamente p^n. Adunque è falso esser $\frac{p^n}{q^n} = a$.

136. *Scol.* I. E da ciò si vede, che le quantità radicali non sieno suscettive di un'unità qualunque intera o frazionaria anche piccolissima, donde resta loro confermata la natura d'*incommensurabili*; ed incommensurabile è pure ogni qualunque rapporto di cui un termine o tutti i due sieno quantità radicali, come per esempio quello di $1 : \sqrt{2}$, che esprime il rapporto del lato del quadrato alla diagonale.

137. *Scol.* II. Le dimostrazioni del Lemma e del Teor. di sopra recati, che abbiam ricavato dal Signor Lhuilier, a meno di qualche assunzione che nello stato presente della maniera d'insegnar le Matematiche deve concedersi com' evidente, ci sembrano preferibili a tutti que' Teoremi che per dimostrare lo stesso assunto trovansi stabiliti da Euclide nel Lib. VII. de' suoi Elementi.

CAP. IX.

De' Radicali immaginarj, e del loro calcolo.

---

138. Se la M dinoti una potenza pari di $\pm A$, sicchè sia $M = \pm A^{2n}$, non potrà mai la M risultare affetta dal segno — (41). Dunque vicendevolmente —M non potrà mai rappresentare una qualunque potenza pari di $\pm A$, cioè che di —M non potrà estrarsene una radice di grado pari, e quindi l'indicazione irrazionale $\sqrt[2n]{-M}$ esprimerà una quantità impossibile, o anche *immaginaria*, come suol chiamarsi. Adunque:

139. *Def.* Si dice quantità *immaginaria* quel radicale che ha l'indice pari, e negativa la quantità sotto del segno.

140. Sebbene però $-A^{2n}$ non possa aver luogo come potenza di $\pm A$, può però essa dinotare il prodotto di un fattore positivo di A^{2n} per un altro negativo, per esempio di $+A^{2n}$ per -1; che perciò, se mai l'espressione immaginaria $\sqrt[2n]{-M}$ si elevi alla potenza $2n$, venendosi a distruggere con una operazione contraria l'operazione impossibile ad eseguirsi sul —M cioè l'estrazione della radice $2n$ da essa, la quantità —M che tornerà a risultarne dovrà esser reale; e reali possono essere in altri casi ancora, che appresso mostreremo i risultamenti derivanti da calcolazioni effettuate su immaginarj. Che perciò il loro calcolo non è da disprezzarsi, nè da credersi di nessun uso, e puramente chimerico; che anzi, come in più luoghi in ap-

presso, principalmente nella teorica delle equazioni, dovrà esser dimostrato, la considerazione degli immaginarj è di somma importanza nelle ricerche che si fanno per mezzo dell' Algebra su quistioni Aritmetiche e Geometriche.

141. Intanto siccome l'importanza di questo calcolo si limita semplicemente a considerare i radicali quadratici immaginarj; noi perciò non ci occuperemo qui appresso, che di essi solamente. E per ora avvertiamo qui di passaggio che le stesse regole che stabiliremo per quelli si potrebbero estendere agli immaginarj di qualunque grado si vogliano supporre, i quali tutti sono riducibili ad espressioni che contengono radicali immaginarj di secondo grado, come a suo luogo mostreremo.

242. Primieramente è facil cosa a rilevare dal n.° 61. che $\sqrt{-M}=\sqrt{M}\times\sqrt{-1}$, cioè che: *ogni radicale immaginario è quanto lo stesso radicale reale, multiplicato per* $\sqrt{-1}$. E sarà questa la forma alla quale supporremo in appresso che sian sempre ridotti gl' immaginarj nello stabilire le regole del calcolo per essi.

Sicchè le quantità immaginarie, per esempio, $3\sqrt{-a^2}$ e $5b\sqrt{-a}$, sarebbero rispettivamente rappresentate da $3a\sqrt{-1}$ e $5b\sqrt{a}\sqrt{-1}$.

143. La somma e la sottrazione delle quantità immaginarie non han bisogno di regole speciali, eseguendosi con quelle stesse già stabilite generalmente ne' numeri dal 53 al 56.

Così la somma delle quantità

$$3a^2+2b\sqrt{-1}-4c\sqrt{-1}$$
$$2p^2+3b\sqrt{-1}-6c\sqrt{-1}$$

è . . . . $3a^2+2p^2+5b\sqrt{-1}-10c\sqrt{-1}$

o anche espressa nel seguente modo

$$3a^2+2p^2+(5b-10c)\sqrt{-1}$$

E la differenza dell' una dall' altra sarebbe

$$3a^2-2p^2-(5b-2c)\sqrt{-1}$$

144. Che se vogliasi multiplicare la quantità reale $\pm a$ per l'immaginaria $\pm b\sqrt{-1}$; il prodotto di tali quantità si ridurrà a quello de' tre fattori $\pm a$, $\pm b$ e $\sqrt{-1}$ de' quali il prodotto de' due primi è già noto che sia $\pm ab$, e questo multiplicato per $\sqrt{-1}$ darà pel prodotto delle quantità proposte $\pm ab\sqrt{-1}$.

Che se poi il fattori sieno tutti due immaginarj come $\pm a\sqrt{-1}$ e $\pm b\sqrt{-1}$, il prodotto de' medesimi equivarrà a quello de' quattro fattori $\pm a, \pm b, +\sqrt{-1}$, $+\sqrt{-1}$; e sarà perciò quanto il prodotto de'due primi per lo prodotto de' due ultimi. Ma i due primi multiplicandosi giusta la regola data di sopra danno $\pm ab$; secondochè tali fattori si prendano con gli stessi segni, o pur con contrarj; e gli altri due essendo identici danno il quadrato di $\sqrt{-1}$, cioè -1. Adunque quel prodotto delle quantità poste da principio sarà $\pm ab\times -1$ ossia $\mp ab$, ove il segno $-$ si trova aver luogo quando i fattori dati erano del segno stesso, il $+$ se di segno diversi: Lo che mostra, che: *il prodotto di due quantià immaginarie è reale; e precisamente quanto quello de' fattori proposti presi come reali, invertendo però la regola pe' segni stabilita per la multiplicazione nel numero 40., cioè dando al prodotto il segno — quando i fattori sono affetti dal segno stesso, e'l segno +, se da contrario segno* (*).

(*) Dal qui esposto, e da quanto fu anche detto nel n. 136. ciascuno potrà giudicare con quanto poco fondamento l' accuratissimo Wolfio abbia detto, trattando della multiplicazione degli immaginarj

ESEMPIO I.

Fattori $\begin{cases} 3m+2a\sqrt{-1}-3\sqrt{b}\sqrt{-1} \\ 2m-3a\sqrt{-1}+2\sqrt{b}\sqrt{-1} \end{cases}$

$$6m^2+4am\sqrt{-1}-6m\sqrt{b}\sqrt{-1}$$
$$-9am\sqrt{-1}+6a^2-9a\sqrt{b}$$
$$+6m\sqrt{b}\sqrt{-1}-4a\sqrt{b}+6b$$

Prodotto $6m^2-5am\sqrt{-1}+6a^2-13a\sqrt{b}+6b$

ESEMPIO II.

Fattori $\begin{cases} x\mp a+b\sqrt{-1} \\ x\mp a-b\sqrt{-1} \end{cases}$

$$x^2\mp ax+bx\sqrt{-1}$$
$$\mp ax+a^2 \quad \mp ab\sqrt{-1}$$
$$-bx\sqrt{-1}\pm ab\sqrt{-1}-b^2$$

Prodotto $x^2\mp 2ax+(a^2-b^2)$

Il qual prodotto è reale, e nascente da due fattori immaginarj della sopraindicata forma.

---

tra loro, che il prodotto sotto al segno $\sqrt{}$ doveva avere il $-$, per la ragione, che *alias enim factores immaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum.* (*Sch.* 3. Prob XIII. *Elem Analys.*)

Ed a questo proposito conviene anche far notare a' giovani, come l' ha fatto il Signor Lhuillier, una inavvertenza nell'Algebra dell'Eulero §. 148. Vol. 1. trovandosi detto che $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$, invece di $-\sqrt{6}$, e $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=2$ invece di -2.

145. Inoltre sia proposto a dividere la quantità immaginaria $\pm a\sqrt{-1}$ per l'altra reale $\pm b$: e chiaro che il quoziente cercato sarà immaginario, ed espresso da $\pm \frac{a}{b}\sqrt{-1}$. Che se al contrario sia reale il dividendo $\pm a$, ed immaginario il divisore $\pm b\sqrt{-1}$; il quoziente sarà pure immaginario ed espresso da $\pm \frac{a}{b\sqrt{-1}}$ ove moltiplicando per $\sqrt{-1}$ i due termini del fratto, si avrà $\pm \frac{a\sqrt{-1}}{-b} = \mp \frac{a}{b}\sqrt{-1}$. Val quanto dire che *un tal quoziente sarà espresso dal dividendo proposto col segno cambiato, multiplicato in* $\sqrt{-1}$, *e diviso pel divisore dato libero dal* $\sqrt{-1}$ *che lo affettava*.

Finalmente se sieno immaginarj ad un tempo stesso il dividendo e 'l divisore, ed espressi l'uno da $\pm a\sqrt{-1}$ e l'altro da $\pm b\sqrt{-1}$, il quoziente sarà indicato da $\pm \frac{a}{b} \times \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{a}{b} \times -1 = \mp \frac{a}{b}$, cioè sarà reale, e dinotato dal quoziente che si avrebbe dividendo alla maniera ordinaria i radicali proposti, suppressovi il fattore comune $\sqrt{-1}$.

ESEMPIO

Divisore

$$3m + 2a\sqrt{-1} - 3\sqrt{b}\sqrt{-1}$$

Quoziente

$$2m - 3a\sqrt{-1} + 2\sqrt{b}\sqrt{-1}$$

Dividendo

$$6m^2 - 5am\sqrt{-1} + 6a^2 - 13a\sqrt{b} + 6b$$
$$6m^2 + 4am\sqrt{-1} - 6m\sqrt{b}\sqrt{-1}$$
$$-9am\sqrt{-1} + 6a^2 + 6m\sqrt{b}\sqrt{-1} - 13a\sqrt{b} + 6b$$
$$-9am\sqrt{-1} + 6a^2 \qquad - 9a\sqrt{b}$$
$$+6m\sqrt{b}\sqrt{-1} - 4a\sqrt{b} + 6b$$
$$+6m\sqrt{b}\sqrt{-1} - 4a\sqrt{b} + 6b$$
$$0$$

146. Da tutte le operazioni esposte intorno a' radicali immaginarj, è facile il rilevarne, che raccogliendo in una somma tutti i termini reali di un'espressione immaginaria, ed indicandola per A; e similmente chiamando B la somma de' coefficienti di $\sqrt{-1}$ ne' termini immaginarj; potrà ogni espressione immaginaria essere generalmente compresa nella formola $A+B\sqrt{-1}$. Ma su di ciò noi dovremo poi espressamente ritornare in appresso.

CAP. X.

DELL' ELEVAVAZIONE A POTENZA, E DELL' ESTRAZIONE DI RADICE DALLE QUANTITA' ALGEBRICHE.



147. Si è già detto nel n.° 25 cosa s' intenda per *potenza* e per *radice* di una data quantità, e come questa s' indichi col segno $\sqrt{}$ nell' apertura del quale va scritto quel numero che dinota l' ordine, o il grado della radice. Ciò che fu poi detto ne' numeri 29, 31 e 32 mostran chiaro la regola da seguirsi per elevare a potenza, o per estrarre la radice di qualsivoglia grado da una quantità monomia, le quali due regole per maggior chiarezza noi quì, come nel proprio loro luogo, daremo più generalmente.

REGOLA

PER L' ELEVAZIONE DI UN MONOMIO A POTENZA

148. *Si eleva un monomio a potenza, eseguendo tal potenza pel coefficiente, e multiplicando l' esponente di ciascun fattore letterale di quel monomio per l' indice della potenza cui deve esso elevarsi, prefiggendo a questa potenza, se impari il segno della quantità data se pari sempre il segno* $+$.

REGOLA

PER L' ESTRAZIONE DI RADICE DA UN MONOMIO.

149. *Si estrarrà da un monomio una determinata radice, estraendola dal coefficiente, e dividendo l' esponente di ciascun fattore letterale di quel monomio per l' indice della radice proposta ad estrarre, col dare a questa radice il segno della quantità data, se di grado impari; e se di grado pari il dubbio segno* $\pm$.

150. E s' intende già, per le due precedenti Regole, che se la quantità data era una frazione, l' operazione suddetta debba ugualmente eseguirsi ne' due termini della medesima: ed essendo quantità radicali convien valersi a proposito delle Regole date in fine del n.° 31, e nel n.° 32.

151. Poste le precedenti generali considerazioni sulle potenze e radici de' monomj algebrici, passeremo a trattar lo stesso argomento pe' polimoni, supponendo però per la seconda di tali operazioni che la quantità polinomia proposta sia potenza perfetta di quel grado ch' è la radice che di essa si cerca.

152. Or da ciò che fu detto nel n.° 25. la potenza di un polinomio è quel prodotto di fattori uguali ad esso, tanti di numero, quante unità sono nel grado della potenza: che perciò la maniera di ottenerla consisterà, com' è chiaro, nella multiplicazione successiva di quel polinomio tante volte per se stesso, meno una, quante ne indicano le unità suddette.

153. Adunque il quadrato di $a+b$ sarà dinotato dal prodotto $(a+b)(a+b)$, ed esso sarà $a^2+2ab+b^2$, che paragonato alla sua radice $a+b$, si vedrà compo-

sto da questa nel seguente modo, cioè: *formando i quadrati di ciascun de' termini a, b di quel binomio, ed aggiungendovi il doppio del loro prodotto.* E questo stesso si vedrà generalmente aver luogo pel quadrato di un polinomio qualunque, cioè che esso costerà de' quadrati delle parti, ossia de' monomj che lo compongono, e di tutti i doppj prodotti de' monomj stessi.

154. E volendo di quel monomio $a+b$ il cubo, bisognerà moltiplicare

il quadrato $a^2+2ab+b^2$
per $a+b$

$$\begin{array}{l} a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \end{array}$$

ed esso risulterà $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ove contiensi, come si vede, il cubo di ciascuna parte del binomio dato, ed il triplo del prodotto del quadrato di ciascuna parte nell'altra. E similmente vedrebbesi doversi contenere i cubi de' monomj di tal fattore, nel cubo di un polinomio qualunque.

155. Continuando, come poc'anzi a multiplicare quel cubo par $a+b$, si avrebbe di $a+b$ la quarta potenza, la quale multiplicata di nuovo per $a+b$ darebbe di tal binomio la quinta potenza, e lo stesso in seguito, come pure per ogni altro polinomio. Sicchè per tale argomento è inutile che noi qui c' intratteghiamo di vantaggio; che perciò passeremo all' operazione inversa di esso, cioè all' estrazione delle radici da' polinomj, alla quale premetteremo come fondamento di essa i seguenti due Teoremi.

TEOREMA I.

156. *Nella potenza n di un polinomio debbevisi necessariamente contenere le potenze n di ciascun termine di esso, e l'altra $n-1$ di ogni termine multiplicato in ciascun degli altri.*

Cioè che in $(a+b+c+d+ec.)^n$ vi debba necessariamente essere

$$a^n,\quad b^n,\quad c^n,\quad d^n \quad ec.$$

ed

$$na^{n-1}(b+c+d+ec.)$$
$$nb^{n-1}(a+c+d+ec.)$$
$$nc^{n-1}(a+b+d+ec.)$$
$$nd^{n-1}(a+b+c+ec.)$$
$$ec.$$

Dim. Imperocchè supponiamo per poco, che nella potenza $n-1$ di quel polinomio vi abbia luogo per rispetto al termine a l'espressione

$$a^{n-1}+(n-1)a^{n-2}(b+c+ec.)$$

egli è chiaro, che per passarsi da questa potenza $n-1$ alla successiva potenza n, si debba moltiplicarla pel polimonio $a+b+c+d+ec.$ Or in tal moltiplicazione si vede chiaro, che prendendo il primo prodotto parziale di quella prima espressione per a primo termine del polinomio, si abbia

$$a^n+(n-1)a^{n-1}(b+c+d+ec.)$$

e continuando la multiplicazione, dovrà prendersi il prodotto di a^{n-1} primo termine di quell' espressione per $b+c+d+ec.$, il quale è

$$a^{n-1}(b+c+d+ec.)$$

Laonde nella potenza n del proposto polinomio vi si

ALITER.

158. Nel polimonio $a+b+c+d+$ec. pongasi $a+b=p$; sarà $(a+b+c+d+\text{ec.})^n=(p+c+d+\text{ec.})^n$, ed in questa potenza vi dovrà essere un termine p^n ch'è quanto $(a+b)^n$. Similmente pongasi $a+b+c=q$; sarà $(a+b+c+d+\text{ec.})^n=(p+d+\text{ec.})^n$; e nello sviluppo della potenza n di $(p+d+\text{ec.})$ vi sarà un termine p^n ossia l'equivalente $(a+b+c)^n$. E lo stesso in seguito.

159. Or posti i principj de' due precedenti Teoremi, è facile il dedurre da essi la regola per l'estrazione di radice da un qualunque polinomio che sia potenza perfetta del grado della radice richiesta.

Imperocchè in quel polinomio dato ogni termine che sia un' esatta potenza del grado n (grado della radice da estrarsi) è la potenza n di un termine corrispondente in tal radice (156): che perciò se scelgasi un di questi nel polinomio proposto, e da esso si estragga la radice n, sarà questa un termine della radice cercata. E se questo si elevi alla potenza $n-1$, e si moltiplichi per n dovrà essere il moltiplicatore di tutti gli altri termini della cercata radice (156): che perciò se nel polinomio proposto si scelga un termine divisibile per quello poc' anzi apparecchiato; il quoziente sarà un'altro termine di quella radice. E dovrà elevandosi a potenza n questo binomio, potersi sottrarre dall' espressione data (157). Or scegliendo nel residuo un termine divisibile per lo stesso divisore poc' anzi apparecchiato, si avrà un'altro termine della radice richiesta (156), e la potenza n di questo trinomio finora ottenuto per radice si potrà sottrarre dal polinomio proposto (157), e così dare un residuo, se mai l'operazione

non siesi terminata, sul quale si opererà come sul precedente per ottenere il quarto termine della radice, e così successivamente.

160. L'operazione generale poc'anzi descritta può abbreviarsi nel seguente modo: Ottenuto un primo termine della radice, come nel numero precedente, si apparecchi il divisore, e poi per esso dividansi tutti i termini della potenza proposta, che ne sono suscettivi, si avranno per quozienti tutti gli altri termini della radice cercata. Ma tal maniera di operare può riescir fallace in qualche caso: nè poi si potrà da essa ricavar mezzo di completare in alcuni casi una potenza del grado n in cui manchi qualche termine, la qual cosa occorre talvolta di fare; che perciò resta sempre preferibile il primo de' metodi sopra esposti.

161. Noi intanto nel dare una convenevole applicazione dell'anzidetta Regola ci limiteremo semplicemente all'estrazione di radici quadrata e cuba, che sono quelle che occorrono frequentemente nell'uso dell'Analisi.

ESEMPIO I.

162. Cerchisi la radice quadrata del polinomio

	$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ $-a^2$ 0	Rad. cercata $a+b+c$ $2a$ Dopp. della radice a del primo termine a^2, ch'è il divisore per continuare l'operazione.
Quadr. de' primi due termini della rad. cercata.	$a^2+2ab+b^2$ 0	
Quadr. de' tre termini della radice cercata, cioè della quantità proposta	$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$	

Ed un tal esempio non ha nè men bisogno di descri-

zione per essere inteso, bastando la maniera com'è esposto, e quello che per l'operazione in esso eseguita fu generalmente detto nel n.° 159.

163. Una tale operazione avrebbe potuto abbreviarsi nel seguente modo, cioè: Dopo essersi ottenuto il primo termine a della radice cercata, il quadrato di esso si sottragga dal primo termine a del quadrato dato, sicchè essi si elidano. Poi si raddoppj l'a, e diviso un termine del quadrato dato che ne sia suscettivo, come $2ab$ per $2a$, si scriva il quoziente $+b$ sì nella radice, che accanto a quel divisore $2a$; egli è chiaro, che multiplicandosi $2a+b$ per b si venga a compiere il doppio prodotto di a per b, e 'l quadrato di b che sono gli altri due termini del quadrato di $a+b$, dopo aver già distrutto il primo di essi a^2: che perciò basterà sottrarre questi da quel residuo che si era ottenuto col sottrarre a^2 dall' espressione data: si otterrà così un nuovo residuo. Similmente si raddoppj la radice $a+b$ finora trovata, e si avrà $2a+2b$: e diviso un termine di quel nuovo residuo, che ne sia suscettivo, per $2a$, si scriva il quoziente c accanto a' due termini della radice già avuti, ed anche accanto a $2a+2b$: è pure manifesto che moltiplicandosi $2a+2b+c$ per c, si verranno ad ottenere i doppj prodotti di a per c, di b per c, e 'l quadrato di c; e questi aggiunti a que' tre altri termini già distrutti, formerebbero tutto il quadrato di $a+b+c$; che perciò sottraggasi questo prodotto dal precedente residuo; e se si abbia un altro residuo, si continui l'operazione stessa che si è fatta pel residuo precedente, si verrà per tal modo ad ottenere la radice cercata; e non essendovene, come nel caso presente, sara $a+b+c$ una tal radice.

ESEMPIO II.

164. *Esaminare se sia un quadrato, o cosa vi manchi per renderlo tale, l'espressione data*

$$x^4-2ax^3+2a^2x^2-b^2x^2-2a^3x+a^4 \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Radice} \\ x^2-ax+a^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll}
\textit{Divisore} & -x^4 \\
2x^2-ax & \overline{0} \\
 & -2ax^3+a^2x^2 \\
2x^2-2ax+a^2 & \overline{0\quad +a^2x^2-b^2x^2-2a^3x+a^4} \\
\text{aggiungasi} & +a^2x^2+b^2x^2 \\
 & \overline{2a^2x^2\quad -2a^3x+a^4} \\
 & -2a^2x^2\quad \mp 2a^3x \pm a^4 \\
 & \overline{0\qquad\quad 0\qquad 0}
\end{array}$$

Sicchè la quantità proposta, per divenire un quadrato perfetto, la cui radice sia x^2-ax+a^2, bisogna aggiugnervi $a^2x^2+b^2x^2$.

È questa specie di ricerca può riescire importante in qualche caso, come avremo altrove occasione di osservarlo.

165. Esempio II.

Vogliasi la radice cubica dell' espressione

$$a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Radice} \\ a+b+c \end{array} \right.$$

$$\frac{-a^3}{0}$$

Divis. $3a^2$ 1. *Res.* $3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ue^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

Cubo di $a+b$ $\frac{a^3}{0}+\frac{3a^2b}{0} \quad \frac{+3ab^2}{0} \quad \frac{+b^3}{0}$

2. *Res.* $3a^2c \quad +6abc+3ac^2 \quad +3b^2c+3b^2c+c^3$

Cubo di $a+b+c$ $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

$$0$$

Cioè si è preso la radice cubica a del termine a^3 dell' espressione data, il quale era cubo perfetto, e questa a è un termine della radice cercata; ed esso elevato a cubo e sottratto dall' espressione proposta ha dato per residuo $3a^2b+3a^2c+ec$. Ciò posto si è apparecchiato il divisore prendendo il triplo del quadrato del termine a della radice poc' anzi trovato, e per questo si è diviso il termine $3a^2b$ di quel residuo; il quoziente $+b$ è stato un altro termine della radice cercata, che finora l'è $a+b$. Ed elevato a cubo il binomio $a+b$ si è sottratto dall' espressione data, e si è avuto il secondo residuo $3a^2c+6abc+ec.$, nel quale diviso il termine $3a^2c$ pel divisore stesso $3a^2$ di sopra apparecchiato, si è avuto il quoziente $+c$ terzo termine della radice cercata; e siccome elevato a cubo il trinomio $a+b+c$, e sottratto dall' espressione data non vi è residuo alcuno, perciò $a+b+c$ è la radice richiesta.

CAP. XI.

Delle combinazioni e permutazioni.

166. *Def.* I. Rappresentino a, b, c, d. . . . . un numero n di cose, che dirò *elementi*, ad essi prendansi a due a due, a tre a tre, ec. in tutt' i modi che ciò può farsi, escludendo però quelli che con diverso ordine comprendono gli elementi stessi; i risultamenti che si otterranno si dicono *Combinazioni*. E di queste ne saranno *Permutazioni* quelle altre combinazioni degli elementi stessi con diverso ordine delle già formate.

167. *Def.* II. Se gli elementi si sono presi a due per volta, le combinazioni, o le permutazioni corrispondenti si diranno *binarie*; se a tre per volta si diranno *ternarie*, ec.

168. Così degli elementi a, b, c, d ne sarebbero combinazioni binarie le seguenti

$$(a,\ b)\ (a,\ c)\ (a,\ d)\ \text{ec.}\ (*)$$

ternarie le altre

$$(a,\ b,\ c)\ (a,\ b,\ d)\ \text{ec.}$$

(*) L' ordinaria maniera di dinotare le combinazioni con l'accozzamento delle lettere che ne esprimono gli elementi, ci è parsa impropria, dopo ciò che si è stabilito nel numero 17., ond' è che abbiamo adottata l' altra forma quassù esposta.

E le permutazioni corrispondenti ad esse sarebbero, per le binarie

(b , a) (c , a) (d , a) ec.

per le ternarie

per la 1. (a, c, b) (b, a, c) ec.
per la 2. (a, d, b) (b, a, d) ec.
ec.

169. *Def.* 111. L' unione delle combinazioni e permutazioni la diremo *combinazioni e permutazioni.*

170. Dall' addotta definizione al n.° 166. è chiaro primieramente, che se gli elementi dati a, b, c, d..... fossero al numero di n, e di essi si volessero le combinazioni al grado stesso n, non ve ne sarebbe che una sola.

171. Quindi con due elementi a, b non si potrà ottenere che la sola combinazione (a , b), ed una sola permutazione (b , a) si potrà ottener da quella combinazione; ond' è che le combinazioni e permutazioni saranno in numero di 2. Che se gli elementi sieno tre a , b , c ; si potrà far da essi una sola combinazione ternaria, che sia (a , b , c). Ma siccome l' a non si è presa che arbitrariamente per primo termine e b per secondo, c per terzo; così cominciando a scambiare quel primo termine in b o c, si avranno le due permutazioni (b , a , c) (c , b , a); e scambiando quel secondo termine b con c , e viceversa in ciascuna delle poc' anzi ottenute tre permutazioni, si otterranno così le altre tre (a , c, b) (c , a , b) (b , c , a). Che perciò essendosi colle precedenti operazioni eseguiti tutti i cambiamenti d' ordine di cui eran suscettivi gli elementi di quella prima combinazione (a , b , c) si vede chiaramente, che con tre elementi si abbia una sola combinazione ternaria, e 5

permutazioni di questa; ond'è che il numero delle une e delle altre sarà espresso da 6, cioè da 3 . 2. E quindi in generale, per un numero n di elementi le combinazioni ternarie risulteranno sempre quanto le combinazioni e permutazioni divise per 3 . 2.

172. Che se gli elementi proposti erano 4 espressi da a, b, c, d; da essi non si avrebbe che la sola combinazione (a, b, c, d); e con un ragionamento analogo al precedente si vedrà, che scambiando il b con l'a, il c con l'a, il d con l'a; ossia passando ciascun di questi elementi per primo, e quello in luogo loro rispettivamente, si avranno tre permutazioni di quella prima combinazione; ed in queste quattro espressioni potendo scambiarsi il c, d, col b se ne verranno ad avere 8 altre che con le quattro precedenti ne verranno a formare 12. Finalmente in queste 12 scambiando il d col c, ne nasceremo 12 altre: ond'è, che il numero delle combinazioni e permutazioni di 4 lettere è 24 cioè espresso da 4. 3. 2.1; e quello delle semplici combinazioni per questo caso, e perciò anche per le combinazioni quadernarie di n elementi dovrà essere un 24.mo delle combinazioni e permutazioni de' medesimi.

173. Ed in generale per un numero m di elementi, le combinazioni e permutazioni al grado m dovranno essere espresse da $m\ (m-1)\ldots\ldots(m-(m-1))$. Di fatti, sia ciò vero per un determinato numero m; se tal numero si accresca di 1, sicchè divenga $m+1=n$ la formola poc' anzi recata si cambierà in

$$(m+1)\ (m-1)\ldots\ldots(\ (m+1)-m\ )$$

cioè in

$$n(n+1)\ (n+2)\ldots\ldots(\ n-(n-1)\ )$$

la quale è identica in forma alla proposta; e ciò indica che verificandosi quella per un dato grado

di combinazioni, e permutazioni, debba anche aver luogo per quelle di un grado superiore; ma quella formola si è veduto verificarsi fino alle combinazioni e permutazioni quadernarie di 4 elementi (172). Dunque lo dovrà pure per le *pentenarie* di 5 elementi; e così sempre.

174. E da ciò segue, che di un numero qualunque di elementi, di cui M esprime il numero delle combinazioni e permutazioni al grado m; quello delle semplici combinazioni dovrà esser dinotato da

$$\frac{M}{m(m-1)\ldots(m-(m-1))}$$

PROBLEMA I.

175. *Dati il numero m di elementi espressi dalle lettere a, b, c, d, e. . . . . . ; determinare il numero delle combinazioni e permutazioni binarie delle medesime.*

Soluz. È manifesto che accoppiando ad a una per volta ciascuna delle altre lettere, che sono al numero $m-1$, si verranno ad avere tutte le combinazioni di a con quelle, che risulteranno anche al numero $m-1$: che similmente accoppiando a b tutte le altre lettere anche al numero $m-1$, compresavi l'a, si verranno ad avere tutte le combinazioni di b con quelle, e queste risulteranno anche al numero $m-1$; e così continuando in seguito per tutti gli altri elementi c, d. . . . . si verranno ad avere m di serie di combinazioni, ciascuna al numero $m-1$ di termini, e nelle quali, com'è chiaro vi si comprenderanno anche tutte le permutazioni; di quelle combinazioni, ond'è che il numero delle une e delle altre dovrà essere dinotato da $m\,(m-1)$, e quindi quello delle une o delle altre separatamente dovrà venir dinotato da $\frac{m(m-1)}{2}$ (171).

PROBLEMA II.

176. *Esibire il numero delle combinazioni e permutazioni ternarie, o quello delle sole combinazioni, o delle sole permutazioni che possonsi effettuare con m lettere.*

Sol. Suppongansi fatte le combinazioni e le permutazioni binarie di essi m elementi, che saranno, come si è veduto al numero $m(m-1)$; per avere le ternarie, è chiaro che ad ognuna di queste converrà accoppiarvi ciascuno degli elementi dati, dal terzo in poi, cioè da c in poi, il che per ogni una di quelle combinazioni e permutazicni binarie ne darebbe $m-2$ ternarie; e quindi l'intero numero delle combinazioni e permutazioni ternarie verrà espresso da $m(m-1)(m-2)$. Laonde modificando la formola del n.° 174. col sostituire all' n il 3 nel presente caso, e per M il poc' anzi recato prodotto: il semplice numero delle combinazioni richieste sarà $\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$

177. *Scol.* Continuando con un ragionamento simile a qnello del precedente Problema, si troverà che il numero delle combinazioni e permutazioni quadernarie di m elementi sia espresso da $m(m-1)\ (m-2)\ (m-3)$; e che quello delle sole combinazioni venghi dinotato da $\frac{m(m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$. Ed in generale che la formola che esprime le combinazioni al grado n di elementi presi tra m che ne sien dati, sia la seguente

$$m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3).....(m-n+1)\ ;$$

e quella delle sole combinazioni sia

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ (m-3).........(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n}$$

Ed una tal cosa volendo dimostrarla quì generalmente si potrà far usò di un ragionamento analogo a quello del n.° 173; il qual metodo di dimostrare è da noi soventi volte adoperato in questi Elementi

E ciò può quì bastare per l' uso che dovremo fare del presente argomento; intorno al quale chi desidera maggiore estensione, ed un esercizio di curiosi Problemi, che da questa teorica immantinente dipendono, noi il consigliamo a leggere principalmente il Cap. XI. Part. I. e II. dell'*Algebra* del Signor Lhuillier.

CAP. XII.

Formola generale dello sviluppo di una potenza qualunque di un binomio.



178. Diverse dimostrazioni sono state date dagli Analisti per lo sviluppo della formola $(x+a)^m$ conosciuta volgarmente col nome di *Binomio del Newton*, ove la m rappresenti un numero qualunque; ma di queste le generalissime riposano sopra principj superiori a quelli de' quali ora trattiamo in questa parte dell' Analisi Algebrica; e dopo l' esposizione de' quali anche noi non tralasceremo di ritornare su questo argomento medesimo, la cui importanza ci obbliga però, per ragion di metodo a doverne ora trattare. Altre di quelle dimostrazioni, che su principj elementari sono fondate, che perciò al presente trattato si confanno, pel caso più semplice, cioè per quello in cui m sia un numero intero positivo, sul quale poi la dimostrazione degli altri casi trovasi fondata, hanno avuto ricorso all' induzione; e taluni solamente dopo di aver così prodotto il loro ragionamento fino ad un certo segno da derivarne con chiarezza la legge onde progredivano i termini di quello sviluppo, sonosi poi fatti a dimostrar generalmente la continuazione della stessa legge in appresso, cioè per tutti gli altri termini, e per qualunque valore intero e positivo della m.

179. A me pare intanto, che siccome la formazione della potenza del binomio in questo primo caso,

consiste effettivamente in una continuata moltiplicazione di quel binomio per se stesso, sicchè per tal modo venisse a comporsi un prodotto di m fattori espressi dal medesimo binomio; così la legge di questa formazione, dalla natura di un prodotto di fattori binomj della forma $x+a$ debba direttamente ripetersi. E tanto più mi giova, che per tal modo questo argomento sia quì trattato, quanto che potrò in appresso valermi di questa stessa ricerca nella composizione de' coefficienti de' termini delle equazioni composte, nel quale argomento, anche dell' induzione la maggior parte degli Analisti si valgono.

TEOREMA.

180. *Se un polinomio ordinato per rapporto ad una lettera x comune a' suoi termini si trovi essere della forma*

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\text{ec}.........+T$$

che chiamerò generalmente M, *ed esso si multiplichi pel binomio $x+a$; il prodotto dovrà essere un polinomio ordinato per rapporto alla stessa x al grado $m+1$, ed avere un termine di più del proposto.*

Dim. Imperocchè multiplicando il polinomio M per x primo termine del binomio $x+a$ si ha di nuovo lo stesso polinomio con la x accresciuta di una dimensione in ciascun termine, ed in seguito moltiplicandosi quel polinomio per $+a$ si dovrà avere un altro prodotto nel quale la x si troverà al grado stesso, che nel polinomio proposto, avendo $+a$ per fattore in tutti i suoi termini. Sicchè stabilendo questo nuovo prodotto di rincontro al precedente, incominciando

perciò dal secondo termine di questo, si potranno ridurre ad un solo i termini moltiplicati per lo stesso grado della x, e risulterà così

$$x^{m+1}+Ax^m+B\ x^{m-1}\ldots\ldots\ldots+T\ x$$
$$+\ ax^m+Aax^{m-1}\ldots\ldots\ldots+Sax+aT$$

cioè

$$x^{m+1}+(A+a)x^m+(B+Aa)x^{m-1}\ldots\ldots+(T+Sa)x+aT$$

il qual prodotto, che in appresso dinoterò per N, si vede aver le condizioni proposte nel Teorema presente.

181. *Cor.* 1. il prodotto di due binomj della forma $x+a$, $x+b$ debbe essere un trinomio, ove la x ascenda a due dimensioni nel primo termine: quello di tre binomi $x+a$, $x+b$, $x+c$ dovrà avere quattro termini, e la x nel primo di questi al terzo grado. E generalmente se sieno al numero m i fattori binomj $x+a$, $x+b$, $x+c$, ec. il loro prodotto dovrà costare di $m+1$ termini, nel primo de' quali la x si troverà al grado m.

182. *Cor.* 2. L'ultimo termine $+aT$ nel polinomio N risulta dal prodotto del secondo termine del binomio $x+a$ per l'ultimo termine T del polinomio M pel quale si è multiplicato, e così supponendo questo polinomio M nato dal prodotto di un polinomio M′ ove la x era al grado $m-1$, e l'ultimo termine veniva espresso da T′, per un fattore binomio $x+\alpha$, si troverebbe essere $T=\alpha T'$; e similmemte retrogradando fino al primo fattore binomio del polinomio M, si troverebbe che l'ultimo termine di un polinomio composto da fattori binomj della forma sopraindicata debba costare del prodotto di tutti i secondi termini di que' binomj; il che per altro era anche chiaro dalla moltiplicazione.

PROBLEMA.

183. *Se un polinomio sia composto da fattori binomj della forma $x+a$, $x+b$, $x+c$, ec. si vuol determinare la natura de' coefficienti della x in ciascun termine di esso.*

Per facilità maggiore supponiamo nel polinomio N (180. *dim.*) trasformata la $m+1$ in n, sicchè esso divenghi della seguente forma N'

$x^n+(A+a)x^{n-1}+(B+Aa)x^{n-2}+\ldots\ldots+(T+Sa)x+Ta$

È chiaro che l'introduzione del fattore $x+a$ nel polinomio M ha accresciuto di $+a$ il coefficiente del secondo termine di quello; e questa legge dovendo sempre verificarsi, cioè aver luogo anche pel polinomio M derivante da M' ($x+\alpha$), sicchè la A sia uguale ad $A'+\alpha$, e così in appresso, si vedrà che generalmente: *il coefficiente del secondo termine del prodotto di più fattori binomj tal che $x+a$, $x+b$, $x+c$, ec. debba risultar dalla somma de' secondi termini di que' binomj.*

Similmente il coefficiente della x^{n-2}, cioè del terzo termine del polinomio N' è $B+Aa$, ove A coefficiente del secondo termine del polinomio M, che aveva un fattore binomio di meno che N' rappresenta la somma di tutti i secondi termini α, β, γ, ec. de' fattori binomj di M, al numero di m; che perciò è chiaro che Aa dinoti la somma dalle combinazioni del secondo termine del binomio $x+a$ per quelli degli altri $+x+\beta+\gamma+$ec. degli altri binomj fattori di M; sicchè per l'introduzione di questo nuovo fattore, il terzo termine del polinomio N', che n'è risultato, si trova accresciuto di tal somma di combinazioni. Ed essendo chiaro

che debba similmente il B essere quanto $B'+A'\alpha$, ove A' rappresenta $+\beta+\gamma+$ec. ed α il secondo termine del nuovo fattore introdotto in M' per avere M, si vedrà che in generale: *il coefficiente del terzo termine di un polinomio prodotto da' binomj $x+a$, $x+b$, $x+c$, ec. debba esser rappresentato dall' aggregato delle combinazioni binarie di tutti i secondi termini di que' fattori.* Ed in generale essendo $Q+Pa$ il coefficiente di un termine qualunque dell' ordine p del prodotto N', e la Q dinotando il cofficiente del luogo stesso nel polinomio precedente M, dovrà essere espressa da $Q'+P'\alpha$; e similmente la Q' sarebbe espressa da $Q''+P''\beta$. Sicchè il coefficiente del termine p proposto, sarebbe espresso da $Q^r\ldots\ldots+P'''\gamma+P''\beta+P'\alpha+Pa$, rappresentando Q^r il coefficiente di quel termine dell' ordine stesso di quello che noi consideriamo, ma nel polinomio del grado $p-1$; che perciò verrebbe ad essere l' ultimo termine di questo, e quindi rappresentato dal prodotto di tutti i secondi termini de' binomj suoi fattori al numero di $p-1$.

Dal che è facile il conchiudere, che il coefficiente di un termine qualunque di quel prodotto N sia quanto la somma delle combinazioni al grado $n-1$ di tutti i secondi termini de' fattori binomj della forma proposta, onde quel prodotto è composto.

184 *Scol.* Ed è poi facile a rilevarsi dalla regola data pe' segni nella multiplicazione, che se i secondi termini di que' fattori binomj sieno tutti positivi, positivi saranno anche tutti i termini di quel prodotto; e che essendo negativi debbano alternarsi i termini del prodotto; risultando negativo il secondo, positivo, il terzo, negativo il quarto ec.

TEOREMA III.

185. *Se 'l binomio $x+a$ si elevi alla potenza n'; dinotando n un numero intero e positivo, una tal potenza avrà la seguente forma*

$$x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} a^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} a^3 x^{n-3} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n} a^{n-1} x + a^n$$

Dim. Imperocchè il secondo termine del prodotto di n fattori $x+a$ deve essere composto da n di volte $+a$, e quindi sarà esso $+na$. Il coefficiente del terzo termine deve essere la somma delle combinazioni binarie di n lettere a; ed il numero di tali combinazioni essendo $\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$, e 'l valore di una di esse venendo dinotato da a^2, ne segue che il valore di tal coefficiente sia per l' appunto $\frac{n(n-1)}{1.\ 2.} a^2$. Inoltre il coefficiente del quarto termine risultando dalle combinazioni ternarie di n lettere a, sarà perciò $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ ec. E 'l coefficiente del termine n risultando dalle combinazioni $n-1$ di n lettere, dovrà esser dinotato da, $\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n}$. E combinando questa riduzione

de' coefficienti, per tal caso, con ciò che nel precedente Teor. si è dimostrato, se ne rileverà facilmente la verità del nostro assunto.

186. *Scol.* 1. Essendo identiche le due espressioni $(x+a)^n$ ed $(a+x)^n$; identici dovranno pur essere i loro sviluppi

$$x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.\,2.}a^2x^{n-2}\ldots+\frac{n(n-1)..(n-n+2)}{1.\,2.\,3....(n-1)}a^{n-1}x$$
$$+\frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1.\,2.\,3........n}a^n$$

$$a^n+nxa^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.\,2.}x^2a^{n-2}\ldots+\frac{n(n-1)..(n-n+2)}{1.\,2.\,3....(n-1)}x^{n-1}a$$
$$+\frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1.\,2.\,3........n}x^n$$

e solamente scritti con ordine permutato; ond' è che debba il coefficiente n del secondo termine pareggiare l' altro $\frac{n(n-1)...(n-n+2)}{1.2.3....(n-1)}$ del penultimo termine; e similmente il coefficiente $\frac{n.(n-1)}{1.\,2}$ del terzo termine dovrà essere uguale a quello dell' antipenultimo termine, e così in appresso. Laonde si vede che quando siesi giunto ad ottenere la metà de' coefficienti dalla potenza n del binomio $x+a$, se la n è impari, quelli de' rimanenti termini saranno questi stessi scritti con ordine inverso, cioè incominciando dall' ultimo ottenuto, e salendo al primo: e se la n è pari, bisogna giungere fino al termine medio, e pe' termini rimanenti,

continuare come si è detto dal precedente a tal medio in indietro.

187. *Scol.* 2. La semplice ispezione dello sviluppo della potenza n del binomio $x+a$ fa vedere, che in ogni termiue il coefficiente stabilito nel modo già detto debba moltiplicare il prodotto de' termini del binomio elevati rispettivamente a tali potenze, che la somma degl' indici di esse faccia n; di tal che se quello di x fosse $n-m$, quello di a dovrebbe essere per l' appunto m, dinotando m il luogo del termine minorato dell'unità; talchè se quel termine era il terzo, sarà $m=2$; se il quarto $m=3$, ec. In guisa che volendo effettuare la potenza n del binomio $x+a$, si potrà abbreviar l' operazione nel seguente modo.

Si stabilisca il prodotto $x^{n-m}a^{m}$, ed in esso si vada sostituendo per m tutt' i numeri interi incominciando dal zero fino all' n stesso, sicchè si abbia

$$x^n,\ x^{n-1}a,\ x^{n-2}a^2 \ldots\ldots\ldots x^{n-m+1}a^{m-1},\ a^n$$

e per stabilirvi i coefficienti, essi saranno, come si è veduto, n pel secondo termine, ed $\frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}$ $\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$ ec. pe' seguenti

Esempio

188. *Voglia elevarsi* $2y^2+4z$ *alla quinta potenza.*

Il prodotto da stabilirsi è

$$(2y^2)^{5-m}(4z)^m$$

e quindi i termini di tal potenza senza cofficienti saranno

1.° $(2y^2)^5$	$m=0$
2.° $(2y^2)^4 \times 4z$	$m=1$
3.° $(2y^2)^3 \times (4z)^2$	$m=2$
4.° $(2y^2)^2 \times (4z)^3$	$m=3$
5.° $(2y^2) \times (4z)^4$	$m=4$
6.° $(2y^2)^5$	$m=5$

ed i coefficienti del secondo e terzo termine, e quindi quelli del 5° e del 4°. saranno $\frac{5}{1}$, $\frac{5.\ 4}{1.\ 2}$, cioè 5 e 10; ond' è che una tal potenza verrà espressa da

$$(2y^2)^5+5(2y^2)^4\times 4z+10(2y^2)^3\times(4z)^2+10(2y^2)^2\times(4z)^3 + 5(2y^2)\times(4z)^4+ (4z)^5$$

ossia, eseguendo le operazioni indicate, da

$$32y^{10}+320y^8z+1280y^6z^2+2560y^4z^3+2560y^2z^4+1024z^5.$$

189. Poichè il binomio $(x+a)^n=x^n(1+\frac{a}{x})^n$ si potrà anche dare ad un binomio da elevarsi a potenza la qui recata forma; il che facilita lo sviluppo, ren-

dendolo indipendente dal primo termine; ed allora non bisognerà far altro in fine, che moltiplicare lo sviluppo ottenuto da $(1+\frac{a}{x})^n$ per x^n, affin di ottenere quello di $(x+a)^n$; ma ciò suole adoperarsi ne' casi dell' esponente n non intero e positivo, ove riesce vantaggioso.

CAP. XIV.

Continuazione dello stesso argomento del precedente Capitolo.

190. Passiamo ora a ricercar lo sviluppo del binomio $(x+a)^n$, supposto che sia n un numero qualunque. Noi seguiremo in questa ricerca il metodo tenuto dall' illustre Signor Lhuillier nella sua profonda opera intitolata *Principiorum Calculi Differentialis et Integralis expositio elementaris*, e ripetuto poi dallo stesso Autore ne'suoi Elementi di Algebra al Cap. XIII; poichè un tal metodo non solo ci sembra assai conducente per l' esattezza e chiarezza de' principj su i quali è fondato; ma è pure quasi che connesso con la dimostrazione da noi data del 1° caso di un tale sviluppo (*).

LEMMA I.

191. *Sieno due formole, tali che*

$$M \quad x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} \ldots\ldots + Q x^{m-r}$$
$$N \quad x^n + A' x^{n-1} + B' x^{n-2} + C' x^{n-3} \ldots\ldots + Q' x^{n-r}$$

(*) Questo metodo del Lhuillier, conviene nel principio, come egli stesso lo avverte, con quello esposto dall' Eulero per la dimostrazione generale, ed elementare della formola del binomio nel vol. XIX. de' *Novi Commentarii* dell' Accademia di Pietroburgo, anno 1774. Ma la facil riduzione di ciascun coefficiente di un termine a quello del precedente ad esso, che qui appresso si vedrà, è interamente dovuta al matematico di Ginevra, ed è ciò da riputarsi come non ultima parte importante in tal dimostrazione.

ordinate per rispetto ad una stessa lettera x (*) (A, B, C..... Q.....; A′, B′, C′...... Q′..... *dinotano i coefficienti della* x; *e quelle che sono solamente diverse per l'apice* ′ *che le affetta, sono coefficienti di termini dell'ordine medesimo*) *ed esse formole si multiplichino tra loro: ciascun termine del prodotto avrà per esponente quelli de' corrispondenti termini ne' fattori, presi insieme, e risulterà dal multiplicare alternativamente l'un di questi termini de' fattori pel primo dell'altro; il precedente ad esso per lo secondo dell'altro; e così in appresso, retrogradando sempre per un termine nell'un fattore, ed avanzando similmente nell'altro.*

Cioè, per lo termine corrispondente nel prodotto a quelli che sono dinotati ne' fattori rispettivamente da Qx^{m-r}, $Q'x^{n-r'}$, verrà esso espresso da

$$Qx^{m-r}.x^{n}+Px^{m-(r-1)}.A'x^{n-1}..+P'x^{n-(r'-1)}.Ax^{m-1}+Q'x^{n-r'}.x^{m}$$

La dimostrazione di ciò è chiara dalla natura della multiplicazione.

LEMMA II.

192. *Supposto che i coefficienti* A, B, C,........ A′, B′, C′,......., *sieno composti in* m, *ed* n *rispettivamente, come quelli della formola del binomio, i coefficienti del prodotto delle formole proposte, saranno similmente composti in* $m+n$, *che lo sono in* m, *o* n *quelli dell'ordine stesso nelle formole date.*

Dim. I coefficienti delle formole date, essendo

(*) Cioè disposte in modo che ne' termini successivi l'esponente della x vadasi continuamente abbassando di 1.

rispettivamente i seguenti,

PER LA PRIMA.	PER LA SECONDA
1	1
m	n
$\frac{m(m-1)}{1.2}$	$\frac{n(n-1)}{1.2}$
$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$
$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$
$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$
ec.	ec.

perciò quello del secondo termine del prodotto di tali formole dovrà risultare espresso da $m+n$ (191).

Quello del terzo termine di tal prodotto, sarà

$$\frac{m(m-1)}{1.2}+m.n+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{2m.n}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$=\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m.n}{1.2}+\frac{m.n}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$=\frac{m(m+n-1)}{1.2}+\frac{n(m+n-1)}{1.2}$$

$$=\frac{(m+n)\ (m+n-1)}{1.2}.$$

Il coefficiente del quarto termine del prodotto medesimo verrà rappresentato da

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{m(m-1)\times n}{1.\,2}+\frac{n(n-1)\times m}{1.\,2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}=$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{3m(m-1)\times n}{1.\,2.\,3}+\frac{3n(n-1)\times m}{1.\,2.\,3}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}=$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{m(m-1)\times n}{1.\,2.\,3}$$

$$+\frac{2m(m-1)\times n}{1.\,2.\,3}+\frac{2n(n-1)\times m}{1.\,2.\,3}$$

$$+\frac{n(n-1)\times m}{1.\,2.\,3}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}=$$

$$\frac{m+n-2}{3}\times\frac{m(m-1)}{1.\,2}+\frac{m+n-2}{3}\times\frac{2m.n}{1.\,2}+\frac{m+n-2}{3}\times\frac{n(n-1)}{1.\,2}=$$

$$\frac{m+n-2}{3}\left(\frac{m(m-1)}{1.\,2}+\frac{2m.n}{1.\,2}+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\right).$$

Ma questa espressione racchiusa nel vincolo si trova essere precisamente quella del termine precedente, e perciò uguale ad $\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.\,2}$. Adunque il coefficiente di questo termine si ridurrà ad

$$\frac{(m+n)\;(m+n-1)\;(m+n-2)}{1.\,2.\,3}.$$

Il coefficiente del quinto termine di quel prodotto sarà espresso da

m(*m*

cioè

m(*m*

E qu

m(*m*-

-2)

$$\ldots 2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

che c[...] esse, si riduce, linea per linea,

a' ter[...]

$$\frac{m+n\ldots}{4}\ \frac{\ldots n-3}{4} \times \frac{n(n-1)\ (n-1)}{1.\ 2.\ 3}$$

cioè a

$$\frac{m+n-\ldots}{4}$$

Nel qual risultamento ritrovandosi la quantità compresa nel vincolo uguale al coefficiente del termine precedente del prodotto; perciò il coefficiente del termine presente del medesimo verrà espresso da

$$\frac{(m+n)\ (m+n-1)\ (m+n-2)\ (m+n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

E così potrebbe prolungarsi una tal dimostrazione; ma senza ciò fare, si rileverà subito, che la legge finora ritrovata verificarsi, debba continuare ad aver luogo pe' coefficienti de' termini seguenti, subito che si riflette, che i fattori onde essi nascono procedono sempre con la medesima legge; e similmente le operazioni che si dovranno fare per eseguir le riduzioni in quel prodotto.

193. *Scol.* Ciò che si è dimostrato ne' due lemmi precedenti, ci conduce a vedere, che se si moltiplichino insieme 3, 4....p formole analoghe a quelle dello sviluppo di $(x+a)^m$, qualunque si suppongano in esse gli esponenti m, n, r ec., il loro prodotto debba esser anche una formola binomiale analoga a ciascuna delle proposte, ove però stia $m+n+r+$ec. per la m, n, r, ec. assoluta di ciascuna delle proposte per fattori.

194. *Cor.* 1. E quindi *si otterrà il quadrato, il cubo....., la potenza n-esima di una formola binomiale, sostituendo da per ogni dove entra il suo esponente, il doppio, il triplo, o n-volte il medesimo.*

195. *Cor* 2. Ed al contrario: *la radice p di una formola binomiale (ove p dinota un numero intero positivo) si otterrà sostituendo dappertutto in quella formola l' esponente della medesima diviso per p.*

Poichè al contrario con sostituire in questa nuova formola binomiale, invece dell' esponente che vi si

trova lo stesso preso p di volte, si ritorna alla proposta.

TEOREMA

196. *Se m ed n sieno n.i interi positivi, dovrà essere*

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} a + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2} x^{\frac{m}{n}-2} a^2$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3} x^{\frac{m}{n}-3} a^3 \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{m}{n}-(r-1)\right)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots r} x^{\frac{m}{n}-r} a^r \ldots\ldots\ldots$$

Dim. Ciò è manifesto dal già detto nel Coroll. 2. del Lemma 2.

TEOREMA

197. *I binomj $(x+a)^{-m}$, ed $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$ si svolgono anch'essi in formole binomiali come quelle de' n.i* 185 *e* 196 *rispettivamente, ove però invece di m, $\frac{m}{n}$ si ponga $-m$ e $-\frac{m}{n}$.*

Dim. Di fatti se lo sviluppo binomiale di $(x+a)^0$ si divide per l' altro $(x+a)^r$, il quoziente sarà un'altra

formola binomiale, ove siavi $n-p$ sostuito alla m, o alla p di una delle proposte, e quindi se $p=n+m$, sarà $n-m$ cioè $-m$ la quantità da sostituirsi nella formola binomiale quoziente. Laonde ec. E la stessa dimostrazione ha luogo anche per l' altro caso del presente Teorema.

ALITER.

198. Il binomio $(a+b)^m$ multiplicato per l' altro $(a+b)^{-m}$ dà $(a+b)^0=1$; onde tale deve anch' essere il prodotto delle rispettive formole binomiali in cui essi si sviluppano. Or la prima di queste è

$$x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}a^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}a^3\ldots\ldots\ldots$$

e supponendo che la forma dell' altro sviluppo sia

$$x^{-m}-mx^{-m-1}a-\frac{m(-m-1)}{1.\ 2}x^{-m-2}a^2$$
$$-\frac{m(-m-1)(-m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{-m-3}a^3\ldots$$

si vede che in tal prodotto, dal secondo termine in poi, vi sia per fattore del coefficiente l' $m-m=0$, ond' è ch' essi tutti svaniscono; che perciò il prodotto cercato verrà rappresentato solamente da $x^{m-m}=x^0=1$. Adunque tal deve essere, quale si è supposta, la formola binomiale $(x+a)^{-m}$. E lo stesso vale anche per lo sviluppo dell' altra $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$.

CAP. XV.

AVVERTENZE NECESSARIE PER CONVENIENTEMENTE SVILUPPARE IN POTENZA UN BINOMIO.

199. Il binomio $(x+a)^m$ non dà per suo sviluppo un'espressione di numero determinato di termini, che nel solo caso che la m sia un numero intero positivo, progredendo negli altri casi all'infinito una tale espressione, come è facile ad avvertirsi, non potendo mai in questi un fattore $m-n$ de' coefficienti dal termine n in poi divenire zero. È dunque della massima importanza che in questi casi i termini dello sviluppo vadano sempre decrescendo, cioè, come sogliono esprimersi gli analiti, che la serie da esso espressa sia la più convergente possibile, perchè dalla somma di un numero di que' termini possa ottenersi, con quella approssimazione che si vuole, il valore dello sviluppo medesimo.

200. Or ritornando nuovamente alla formola binomiale.

$$x^m+m.ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\,2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^3x^{m-3}..$$

e scrivendola sotto quest'altra forma

$$x^m\left(1+m\cdot\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.\,2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{a^3}{x^3}\ldots\right)$$

si vede chiaramente che se il fratto $\frac{a}{x}$ sia vero, vi

sarà in tutti i termini della serie un fattore che va continuamente decrescendo, e con tanto più rapidità, per quanto più l'a è piccola in paragone della x; che perciò, ne' casi in cui la m sia anch'essa un fratto positivo o negativo, talchè $\frac{n}{r}$, che perciò risultano anche frazionarj i fattori del coefficiente di ogni termine, e quindi decrescenti continuamente, si vede chiaramente, che l'espressione binomiale risulti convergente.

201. Nel caso poi che la m suppongasi un numero intero negativo, laddove $\frac{a}{x}$ sia un fratto vero, si vede, che avrà luogo il decrescimento continuo ne' termini dello sviluppo per questo fattore; ma non perciò potrà dedursi per legittima conseguenza, che la serie compresa nel vincolo, la quale in questo caso è della forma

$$1-m.\frac{a}{x}+\frac{m(m+1)}{1.\ 2}.\frac{a^2}{x^2}+\ldots\ldots\frac{m(m+1)..(m+n)}{1.\ 2\ldots.n+1}.\frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}$$

risulti convergente; dipendendo ciò anche da' coefficienti che accompagnano le rispettive potenze della $\frac{a}{x}$ ne' termini della serie, e quindi dal valore della m per rispetto alla x. E ciò era qui necessario ad esser con ispecialità notato; trovandosi anche da' più accurati Analisti manifestamente detto nelle istituzioni di Algebra, che *acciò la serie riesca convergente, bisognerà prendere* $x>a$ (*). Sarà però sempre ben fatto in questo caso di mettere la $a=1$.

(*) Veg. gli Elem. di Algebra di Pietro Paoli.

202. Ritornando nuovamente al caso della m espressa da $\pm\frac{n}{r}$ si vede che la serie rinchiusa nel vincolo trovasi affetta dal coefficiente $x^{\pm\frac{n}{r}}$, che perciò dovendo risultare essa scevra da quantità radicali, bisogna che la x sia espressa da y^r, cioè sia potenza perfetta del grado dinotato dal denominatore dell' esponente fratto del binomio; sicchè questo venghi espresso da $(y^r+a)^{\frac{n}{r}}$.

I seguenti esempli mostreranno ciò che si è finora generalmente indicato.

Per un' esponente negativo.

ESEMPIO I.

203. *Sia proposto a svolgere in serie per mezzo della formola binomiale il fratto $\frac{1}{2}$.*

Se un tal fratto si ponga sotto la forma $\frac{1}{1+1}$, si troverà, paragonandolo col fratto $\frac{1}{(x+a)^m}$ essere $x=1$, $a=1$, $m=1$, e fatte le sostituzioni e riduzioni indicate nella formola del n.° 200, si otterrebbe per questo caso la stessa serie data nel n.° 105.

Che se pongasi $2=3-1$; e si facciano le sostituzioni come poc' anzi, si otterrà per $\frac{1}{2}=\frac{1}{3-1}$ il se-

guente sviluppo convergente

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}\ldots\ldots$$

Finalmente riflettendo che $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{2}{3+1}=\frac{2}{5-1}$ ed eseguendo lo sviluppo, si otterrà, per quest' ultima riduzione, la seguente serie più convergente delle precedenti $\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}\ldots\ldots\right)$

E nel modo stesso procedendo innanzi, si potrebbero ottenere pel fratto $\frac{1}{2}$ delle serie sempre più convergenti.

ESEMPIO. II.

204. *Sia proposto a svolgere in serie il fratto* $\frac{1}{3^{1000000}}$.

Pongasi $3=4-1$, sicchè il fratto proposto prenda la forma $\frac{1}{(4-1)^{1000000}}=(4-1)^{-1000000}$. Eseguendo lo sviluppo col porre nella formola del n.° 200 $x=4$, $a=1$, $m=-1000000$, essa prenderà la seguente forma

$$\frac{1}{4^{1000000}}\left(1-1000000\times\frac{1}{4}+\frac{1000000\times1000001}{1.\ 2.}\times\frac{1}{16}-\frac{1000000\times1000001\times1000002}{1.\ 2.\ 3.}\times\frac{1}{64}\ldots\ldots\right.$$

205. Ritornando però a quello che è stato detto per questo caso dello sviluppo di un binomio in serie, si vede anche dalla serie poc'anzi espressa, che un tale sviluppo ne' casi particolari non può essere di alcuna utilità nell' Analisi Algebrica. Imperocchè nessun vantaggio si potrà mai ottenere dallo svolgere in serie la frazione $\frac{1}{a^n}$, ove a dinoti un numero, e poi si vede che una tale operazione obbligherebbe ad elevare alla stessa potenza n un numero di un' unità maggiore di a, quando lo scindimento di questo si abbia voluto condizionare nella maniera più vantaggiosa; sicchè sarà assai più conducente il rappresentare come conviensi il fratto $\frac{1}{a^n}$, elevando da principio il numero a alla potenza cercata n. Non così però ne' casi dell' esponente frazionario, che ora particolarmente considereremo, ne' quali la formola del binomio ci conduce ad ottener le radici de' numeri con una conveniente e rapida approssimazione; e serve anche vantaggiosamente in molti casi nell' Analisi Sublime.

Per un' esponente frazionario.

ESEMPIO I.

206. *Si vuole estrarre la radice quadrata da 2, cioè si vuole svolgere in serie* $\sqrt{2}$.

Se pongasi $2 = 1 + 1$; per mezzo della seconda formola esposta nel n.° 200, ove $m = \frac{1}{2}$ si otterrà

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}+\frac{7}{258}-\frac{21}{1024}+\dots$$

Che se pongasi $2=4-2$ si otterrà la seguente serie un poco più convergente.

$$\sqrt{2}=2\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}+\frac{1}{256}\dots\dots\right)$$

E continuando a decomporre il 2 nelle due parti $\frac{49}{25}$ e $\frac{1}{25}$ (*) si otterrebbe la serie assai più convergente.

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{98}-\frac{1}{2744}+\dots\dots\right)$$

E si otterrebbe una seria anche più convergente della precedente, se pongasi $2=\frac{289}{144}-\frac{1}{144}$. E lo stesso per altri casi.

ESEMPIO II.

207. *Svolgere in serie il fratto* $\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$

Si scinda il 2 in uno de' binomj già indicati nel precedente esempio, e poi si esegua lo sviluppo della formola 200., ove la x è uguale al primo termine di questo binomio, l'a al secondo col segno che esso ha, e l'$m=-\frac{1}{2}$.

(*) Cioè moltiplicando il 2 per numero quadrato 25, e poi operando l'indicato scindimento;

SCOLIO.

208. Oltre al metodo esposto di sopra per estrarre per approssimazione le radici dalle formole binomie della forma $x^n + a$, ove n sia il grado della radice, l' Halley un altro ne espose nel vol. delle *Transazioni Filosofiche* del 1694., che per la facilità, e celerità con cui conduce ad una grande approssimazione delle medesime non deve esser trascurato, come lo è, in quasi tutte le istituzioni di Algebra, non trovandosi esposto che negli Elementi del *Lacaille* pubblicati dal *Marie*, ed accennato nelle Note agli Elementi di Algebra di *Eulero*.

Un tal metodo che riduce immantinente la proposta estrazione di radice del grado n a quella di una radice quadratica, verrà da noi esposto nel seguente Libro.

CAP. XVI.

Conseguenze che derivansi dal Cap. XIV.

209. Se i due binomj $(x+a)^n$ ed $(x-a)^n$ si sviluppino nelle loro corrispondenti formole binomiali, è chiaro che queste dovranno essere identiche nel valore de' termini, e solamente aver di contrario segno quelli che contengono le potenze impari della a, cioè il secondo il quarto, ed in generale tutti i termini de' luoghi pari; che perciò se quelle due formole binomiali si sommino tra loro, dovranno distruggersi questi termini; e solamente trovarsi in quella somma i doppj de' termini impari, vale a dire, che tal somma sarà quanto il doppio di una di esse espressioni binomiali, ove siensi soppressi tutti i termini de luoghi impari, e quindi espressa da

$$2.x^n\left(1+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{a^2}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.\frac{a^4}{x^4}\dots\right)$$

210. Che se al contrario si fosse l' una espressione binomiale sottratta dall'altra, per esempio la seconda dalla prima, si vede facilmente che sarebbero dispersi i termini de' luoghi impari, e restati solamente in tal somma il doppio di ciascun de' termini che sono ne' luoghi pari, cioè sarebbe essa risultata della seguente forma

$$2.x^n\left(n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\ \frac{a^3}{x^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\ \frac{a^5}{x^5}\right)$$

211. Quindi se la a fosse una quantità immaginaria, tal che $b\sqrt{-1}$; si vede che quella prima espressione dinotante la somma delle due formole binomiali proposte risulterebbe reale e della forma

$$2x^n\left(1-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\ .\ \frac{b^2}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\ .\ \frac{b^4}{x^4}-\ldots\right)$$

ed al contrario l'espressione della loro differenza sarebbe immaginaria e della forma seguente

$$2.x^n\sqrt{-1}\left(n.\frac{b}{x}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\ .\ \frac{b^3}{x^3}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\ .\ \frac{b^5}{x^5}\ldots\right)$$

212. S'intende poi per intuizione, che in questo caso ciascuna delle formola binomiali in cui si sviluppa il binomio $(x\pm b\sqrt{-1})^n$, qualunque sia l'esponente n sia un' espressione della forma $A\pm B\sqrt{-1}$, ove A dinota tutti i termini impari di quello sviluppo, che sono quantità reali, e B tutti i termini de' luoghi pari che sono immaginarj, e ne' quali si è cacciato per fattore comune il $\sqrt{-1}$.

E quello, che in questo numero si è detto, deve aversi come una convenevol continuazione a quanto si disse già nel n.° 140.

213. Chiuderemo qui l'argomento dello sviluppo di un binomio in serie, indicando la maniera di adoperare la stessa formola binomiale nell' esprimere la

potenza n di un trinomio, quadrinomio, ed in generale di un polinomio qualunque. Sia di fatti $x+a+b+ec.$ un polinomio da elevarsi alla potenza qualunque n si ponga $a+b+c+ec.=y$; prenderà quel polinomio, per tal sostituzione la forma di un binomio, tal che $(x+y)^n$; ed eseguitosi lo sviluppo di questo nella sua formola binomiale corrispondente, non resterà poi a far altro, che di sostituire ad y, y^2, y^3......y^m le loro equivalenti espressioni $a+b+c+ec.$ $(a+b+c+ec.)^2$, $(a+b+c+ec.)^3$....$(a+b+c+ec.)^n$



DELL' ALGEBRA

LIBRO II.

DELLE EQUAZIONI DI 1.° E 2.° GRADO, E DI ALTRE RICERCHE CHE NE DIPENDONO.

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI INTORNO ALLE EQUAZIONI ED A' PROBLEMI.

214. *Def.* I. Ogni ricerca intorno a quantità si dice Problema.

215. *Def.* II. Il soggetto che ricercasi si denomina *Quesito*: le cose onde tal quesito si deve far derivare si chiamano *Dati*; ed i mezzi di connessione tra i dati e 'l quesito, cioè il loro rapporto, o i rapporti vicendevoli si chiamano *Condizioni* del Problema.

216. *Scol.* I. Le cose suddette sono essenziali alla natura del Problema, anche qualora ne fosse impossibile la soluzione.

217. *Scol.* 2. L'arte di chi risolve un Problema algebricamente consiste in saperne convenevolmente contrassegnare i dati e 'l quesito con simboli, impiegando le prime lettere dell' Alfabeto pe' dati, che diconsi anche *quantità note*, e le ultime pel quesito o per quelle altre quantità da cui si può esso immediatamante derivare, le quali chiamansi perciò *incognite*: indi poi bisogna che da que' dati si discenda al quesito per mezzo delle condizioni, esprimendo queste in linguaggio algebrico; il che fatto, si potrà sempre quel rapporto che costituisce ogni condizione di un Problema, qualunque esso siasi, ridurre ad uguaglianza, che dicesi *Equazione*.

218. *Def.* 111. *Equazione* è dunque ogni condizione di un Problema espressa in linguaggio algebrico, e ridotta a pareggiamento tra le note, e le incognite del medesimo.

219. Finalmente conviene maneggiar questa equazione in modo, che l' incognita resti da quelle grandezze che sono note espressa e determinata; il che si dice *Risolvere l' equazione*.

220. Ed ecco alcuni esempj atti a rischiarare ciò che si è detto.

PROBLEMA I.

221. *Dividere un numero dato in due parti delle quali l' una contenga l' altra 100 volte.*

Si vede chiaramente che qui il dato sia il numero da dividersi, il quesito una delle due parti in cui esso vuol dividersi, e la condizione, che una di queste sia 100 volte l' altra; ciò premesso, eccone la

SOLUZIONE.

Si esprima per a il numero dato, e per x la parte minore, sarà l'altra parte quanto $a-x$. Ma la condizione del Problema vuole che questa parte sia 100 volte la prima; che perciò vi sarà pareggiamento tra $a-x$, e 'l centuplo di x, cioè si avrà la seguente equazione

$$a-x=100x$$

PROBLEMA II.

222. *Trovar due numeri, de' quali sia dato l'eccesso di uno sull' altro, e 'l loro prodotto.*

SOLUZIONE.

Si esprima per a l'eccesso dato, e per b^2 il prodotto anche dato; è chiaro, che se il numero minore si dinoti con x, il maggiore dovrà esprimersi con $a+x$; ma essi moltiplicati insieme debbono produrre b^2. Adunque vi sarà pareggiamento tra $(x+a)\times x$ e b^2; il che darà la seguente equazione a quel Problema.

$$x^2+ax=b^2$$

PROBLEMA III.

223. *Ritrovar due numeri, de' quali sia data la differenza, e 'l prodotto de' medesimi e della loro somma.*

SOLUZIONE.

La differenza data si dica a, e quel dato prodotto si chiami b^3, si esprima poi con x il minore de' numeri cercati; l'altro verrà dinotato da $x+a$; e per condizione del Problema, dovendo essere b^3; il prodotto di x, $x+a$, ed $x+x+a$, si avrà l'equazione

$$2x^3+3ax^2+a^2x=b^3$$

224. *Scol.* I precedenti tre Problemi potranno bastare per ora di rischiaramento a quello che si è detto di sopra. Or riflettendo sulle equazioni che da essi sono risultate si osserverà subito tra esse la differenza, che in quella del primo Problema l'incognita x ha in tutt'i termini ove si ritrova l'esponente 1; mentre nel secondo ritrovasi in un termine con l'esponente 2; e nel terzo Problema anche con l'esponente 3; e potrebbe in altri casi aver pure il 4, il 5, ed in generale un qualunque esponente n intero positivo. Or ciò costituisce, come vedremo in appresso, una gradissima differenza tra le equazioni pel loro maneggiamento, e tra i Problemi onde derivano.

225. *Def.* IV. Ogni equazione ove l'esponente dell'incognita non eccede l'1 si dice di *primo grado*. E si dirà di *secondo*, di *terzo* grado; ed in generale dal grado n un'equazione, se in essa vi sia qualche termine che abbia per l'incognita l'esponente 2, 3.....n.

226. *Def.* v. Le equazioni di 1° grado si dicono anche *semplici*, e si chiamano *composte* quelle di 2°, 3°.....*n*-grado. E la ragione di ciò la vedremo in appresso.

227. *Def.* vi. Per ogni equazione, l'espressione algebrica che precede il segno di uguaglianza si dice 1° *membro* dell' equazione; e si chiama 2° *membro* l' altra espressione che segue un tal segno.

228. *Def* vii. Un'equazione si dice ordinata, se tutti i termini di essa, che contengono l' incognita si trovino nel 1° membro, ed i termini noti nel 2°. e di più, essendo composta, se que' termini del 1°membro si trovino collocati secondo l'ordine degli esponenti dell'incognita, incominciando dal massimo.

Cotesto ordinamento è fondato sul seguente

TEOREMA

229. *Ogni termine di un' equazione può ad arbitrio cancellarsi in un membro, e scriversi nell' altro col segno cambiato, senza che si turbi il pareggiamento.*

Dim. Imperocchè col cancellarsi in un membro un termine, vi si è venuto ad aggiugnere esso stesso col segno contrario; che perciò affinchè non si turbi il pareggiamento, bisogna che l' aggiunzione della stessa quantità si faccia anche nell' altro membro, ove verrà quindi a comparir quello col segno cambiato.

230. *Scol.* i. Che perciò l' equazione ordinata dalla proposta

$$x^3+bx+c=ax^2+m$$

sarebbe $$x^3-ax^2+bx=m-c.$$

231. *Scol.* ii. Per mezzo del Teorema poc' anzi

dimostrato si vede chiaramente, che può anche tutt'intero un membro di un'equazione distruggersi, facendosi ricomparire nell'altro co' segni cambiati ne' suoi termini, ed in tal caso l'equazione si dirà *ridotta a zero*.

Così, nel presente caso, la ridotta a zero dell'equazione proposta sarebbe

$$x^3-ax^2+bx+c-m=0.$$

232. Bisogna però avvertire, e ciò per evitare un errore ordinario, che quel o (*zero*) che rappresenta il 2° membro, non dinota già che il 1° membro sia assolutamente il puro *niente*, nel qual caso sarebbe vana ogni ricerca su di esso; e nullo il maneggio per la risoluzione delle equazioni composte, il qual si esegue ordinariamente dopo una tal riduzione a zero, ma esso è un simbolo che dinota, che effettivamente si distruggerebbero tra loro i termini del 1° membro, ne' casi che, per l'incognita x si sostituissero que' valori determinati che sono il quesito del Problema, donde deriva quell'equazione.

233. Con poca riflessione che siasi fatta su i precedenti tre Problemi, ognuno si sarà accorto, che nel primo di essi si cercava un solo numero; mentre nel secondo e terzo se ne vogliono due; ma che nel primo vi era una sola condizione, e negli altri ve n'erano due, come era ben naturale; poichè cercandosi due numeri, ed essendo perciò due le cose ignote, due rapporti distinti dovevano anche esservi tra esse e le quantità note. Or nelle soluzioni da noi date, avendo rappresentata con x una delle due incognite, cioè uno de' due numeri cercati, ci siamo serviti di una delle condizioni per esprimere l'altro numero nel primo; e dell'altra di esse ci siamo poi valuti per l'equazione al Problema, dalla quale risoluta, ottenutosi il valore di un'inco-

gnita, presto se ne deriva quello dell'altra, per mezzo dell'altra condizione. Ma se le incognite si avessero voluto rappresentare l'una distintamente dall' altra, allora ciascuna condizione avrebbe dovuto costituire un'equazione distinta; e sarebbero perciò state due le equazioni a ciascuno di que' due ultimi Problemi, come due sono le incognite in ciascuno di essi.

In fatti sia l'un de' numeri cercati espresso da x, l'altro da y; si avrà pel 2° Problema

$$x-y=a \qquad 1.\ \textit{Equazione}$$
$$xy=b^2 \qquad 2.\ \textit{Equazione}$$

e pel 3.° Problema

$$x-y=a \qquad 1.\ \textit{Equazione}$$
$$x^2y-y^2x=b^3 \qquad 2.\ \textit{Equazione}$$

Ed in altri casi ove le incognite fossero tre, e tre le condizioni per determinarle dalle note, il Problema avrebbe tre equazioni, e così in seguito.

234. E ciò che qui si è veduto potersi operare nell' un modo o nell' altro; talvolta conviene di necessità farlo, riescendo intrigatissimo, o anche impossibile a potersi cammin facendo nella soluzione esprimere ciascuna incognita per l'altra, fino a pervenire ad un' equazione con una sola incognita. Che perciò si vede, che i Problemi possono manodurre ad una sola equazione con una sola incognita, o pure a più equazioni con incognite anche diverse, altrettante però in numero, quante sono quelle incognite, non potendo esservi completa soluzione di un Problema, ove non siensi stabiliti tanti rapporti con quantità note, quante incognite distinte vi sono: dico distinte o *dissocie*, cioè tali, che l' una non sia conseguenza dell' altra. Ciò non ostante, ove avvenga che il numero delle incognite sia maggiore di quello delle condizioni, fino ad un certo segno, l' Al-

gebra ha fissati de' limiti tra i quali deve contenersi ciascuna quantità cercata; e noi in appresso non tralasceremo anche di farli conoscere.

235. *Def.* VIII. Chiamansi *Determinati* que' Problemi ne' quali le incognite, e le condizioni sono al numero stesso. E chiamasi *determinata* ogni equazione ad una sola incognita.

236. *Def.* IX. Che se poi il numero delle incognite sia maggiore di quello delle condizioni; allora il Problema dirassi *Indeterminato*; ed *Indeterminata* dicesi puranche ogni equazione che abbia due o più incognite.

237. *Def.* X. Quella parte di Analisi Algebrica, che tratta de' primi Problemi, e delle equazioni ad una sola incognita dicesi *Determinata*, e chiamasi *Indeterminata* quell' altra ove consideransi le equazioni ed i Problemi Indeterminati.

CAP. II.

DELLA MANIERA DI APPARECCHIARE UN' EQUAZIONE.

238. Allorchè proponesi a risolvere un' equazione, o può che essa risulti, com' è la sua origine, da un Problema sciolto coll' Analisi Algebrica, la cosa alla quale conviene far attenzione, prima di adattarvi le regole pel risolvimento, si è di convenevolmente apparecchiarla, del che noi tratteremo in questo Capitolo.

239. Le regole da seguirsi a tal proposito, sono le seguenti.

REGOLA I.

240. *Se ne' due membri di un' equazione vi sieno termini simili, conviene* contrarli, *il che si esegue, o ordinando l' equazione,* o *pure sommando quelli che sono in ciascun membro, e poi distruggendo ne' due la minor somma, con aggiungerla ad essi col contrario segno.*

Così l' equazione

$$x^3-2x^2+3b=5x-7x^2+2b$$

si riduce all' altra

$$x^3+b=5x-5x^2$$

che ordinata diviene

$$x^3+5x^2-5x=-b.$$

REGOLA II.

241. *Se tutt' i termini di un' equazione sieno moltiplicati per una stessa quantità, bisogna dividerli per essa. E se avevano un comun divisore, conviene moltiplicar per esso l' intera equazione.*

Per tal modo l' equazione

$$ax^3+4a^2x^2+5a^3x=a^4$$

si riduce all' altra

$$x^3+4ax^2+5a^2x=a^3$$

E l' equazione

$$\frac{x^3}{m}+\frac{4a^2x^2}{m}+\frac{5a^3x}{m}=\frac{a^4}{m}$$

si riduce alla seguente

$$x^3+4a^2x^2+5a^3x=a^4$$

REGOLA III.

242. *Se ne' termini dell' equazione proposta vi sia qualche fratto irriducibile, nel cui denominatore vi esiste l' incognita dell' equazione, tutt' i termini dell' equazione debbono moltiplicarsi per tal denominatore, o per qualche fattore di esso.*

Così se si abbia l' equazione

$$x^2+\frac{a}{b-x}=cx$$

moltiplicando tutt' i suoi termini per $b-x$, essa diverrà

$$bx^2-x^3+a=cbx-cx^2$$

cioè ordinandola ne' suoi termini, e moltiplicando ciascun di questi per -1, affinchè il primo termine diventi positivo, essa diverrà

$$x^3-(b+c)x^2+cbx=a$$

E nell' altra equazione

$$\frac{a^3-ab^2}{2cy-c^2}=y-c$$

moltiplicando i suoi termini per $2cy-c^2$, o almeno per $2y-c$, perchè svanisse l'ignota y dal denominatore, essa equazione diverrà

$$\frac{a^3-ab^2}{c}=2y^2-3cy+c^2$$

che ordinata è la seguente

$$2y^2-3cy=\frac{a^3-ab^2-c^3}{c}$$

REGOLA IV.

243. *Se nell' equazione ordinata il primo termine si trovi affetto da coefficiente diverso dall' 1; bisogna dividere l' intera equazione per tal coefficiente.*

Così l' equazione

$$ax^3+bx^2+cx=m$$

diviene

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x=m$$

244. Ma in appresso mostreremo ancora per qual via possa un' equazione di quella forma trasformarsi in un altra libera da coefficiente nel primo termine, e nel tempo stesso da divisore.

BEGOLA V.

245. *Se nell' equazione proposta s' incontrano radicali irriducibili, che comprendono sotto del loro segno l' incognita, bisogna liberarnela. E ciò si esegue isolando in un membro dell' equazione uno per volta questi radicali, e poi elevando i due membri della medesima alla potenza dinotata dall' indice di quel radicale già isolato.*

Così nell' equazione

$$x^2 = \sqrt{(a-x^2)}+b$$

trasportando il b nel primo membro, si ha

$$x^2-b=\sqrt{(a^2-x^2)}$$

ed elevando a quadrato, essa diviene libera dal radicale, e della seguente forma

$$x^4-2bx^2+b^2=a^2-x^2$$

cioè $\quad x^4-(2b-1)x^2=a^2-b^2$

E l' altra equazione

$$c\sqrt[3]{x^2}+a\sqrt{x}=m$$

trasportando l' un de' termini affetti dal radicale, sia il quadratico, nel secondo membro, e poi elevando a cubo diviene

$$c^3x^2=m^3-3m^2a\sqrt{x}+3a^2mx-a^3x\sqrt{x}$$

e di nuovo isolando il termine $-(3m^2a+a^3x)\sqrt{x}$ affetto dal radicale; e poi elevando a quadrato i due

membri e riducendo, essa si troverà interamente libera da' radicali, e nella seguente forma ordinata

$$x^4-\left(\frac{6a^2c^3m+a^6}{c^6}\right)x^3+\left(\frac{3a^4m^2-3c^3m^3}{c^6}\right)x^2$$

$$-\frac{3a^2m^4x}{c^6}+\frac{m^6}{c^6}=o$$

E la medesima equazione di sopra proposta si sarebbe anche potuto ridurre in forma razionale col porre $x=y^6$; nel qual caso essa ad un tratto si sarebbe trasformata in

$$y^4+\frac{ay^2}{c}=\frac{m}{c}$$

Similmente l' altra equazione

$$y=\sqrt{(\,ay+y^2-a\sqrt{(ay-y^2)}\,)}$$

elevandola a quadrato diviene

$$y^2=ay+y^2-a\sqrt{(ay-y^2)}$$

la quale, isolato il radicale che in questa si contiene, e quadrati di nuovo i due membri, e finalmente ordinando, si riduce a

$$2y^2=ay$$

cioè

$$2y=a$$

246. Le operazioni prescritte nelle due ultime precedenti Regole sono necessarie per poter anche definire il grado di un' equazione, non potendo questo assegnarsi che solamente quando l' equazione non contiene l' incognita nè per divisore, nè sotto a segni radicali.

REGOLA VI.

247. *Talvolta si può ridurre un' equazione, dividendola per qualche fattore composto.*

Così se nell' equazione

$$y^3 = \left.\begin{matrix}-2c\\+b\end{matrix}\right\} y^2 + 3bcy - b^2c$$

si trasportino tutt'i termini nel 1°. membro, essa diverrà

$$y^3 \left.\begin{matrix}+2c\\-b\end{matrix}\right\} y^2 - 3bcy + b^2c = 0$$

ch'è divisibile per $y-b$; ed eseguita tal divisione, si vedrà essa ridursi ad

$$y^2 + 2cy - bc = 0$$

CAP. III.

DELLA MANIERA DI RISOLVERE LE EQUAZIONI DETERMINATE DI I°. GRADO.

PROBLEMA

248. *Risolvere un' equazione determinata di 1°. grado.*

Soluz. Allorchè siasi ordinata una tale equazione, l' incognita si troverà nel primo membro per moltiplicatore comune di tutti i termini del medesimo; che perciò questo verrà espresso dall'incognita moltiplicata nella somma di tutt' i suoi coefficienti: e quindi, se dividansi ambo i membri per tal somma, si verrà ad ottenere il valore dell'incognita; e solamente resterà a fare le riduzioni necessarie, ove ne occorrano.

ESEMPIO I.

249. Sia proposta l' equazione

$$ax+bx-m=cx-n,$$

ordinandola sarà $ax+bx-cx=m-n$

ossia $(a+b-c)\,x=m-n$

ed $x=\frac{m-n}{a+b-c}$

de'fratti, si avrà $ansqx+bmsqx+mnqr=cmnqsx+pmns$, che ordinata, e poi risoluta, come si è detto di sopra, darà

$$x=\frac{pmns-mnqr}{anqs+bmqs-cmnqs}$$

E se l'equazione data fosse stata

$$\frac{ax}{4m^2}+\frac{bx}{2pn}=\frac{c}{8n^3}$$

siccome il $2n$ e 'l 4, fattori de' primi due denominatori, sono summultiplici dell' $8n^3$ ch'è l'altro denominatore; così basterà moltiplicare quell'equazione pel prodotto di m^2, di p e di $8n^3$, cioè per $8pm^2n^3$, e si otterrà la ridotta libera da' fratti

$$2apn^3x+4bm^2n^2x=cpm^2$$

dalla quale si ha

$$x=\frac{cpm^2}{2apn^3+4bm^2n}$$

CAP. IV.

Del maneggio di più equazioni di I°. grado con altrettante incognite, per ottener l'eliminata di quelle.

252. Allorchè nel risolvere un Problema determinato, in cui il quesito comprendeva più incognite, non si è potuto far uso delle condizioni di esso meno una, per pervenire così a stabilire con quest' ultima l'equazione finale al Problema; ma che ciascuna condizione si è espressa per una equazione separata tra quelle incognite (*), le quali equazioni non sono perciò, come si vede, equazioni al Problema; ma rapporti algebrici tra le quantità del medesimo, da derivarne poi l'equazione suddetta, ad una sola incognita; in tal caso è necessario che si conoscano le regole per pervenire a questa equazione finale: ed è di esse che passeremo ad occuparci.

253. *Def.* XI. L'equazione determinata che derivasi da più altre equazioni con altrettante incognite, dicesi *eliminata*; ed il metodo, qualunque siasi, onde si fa di volta in volta svanire qualche una di quelle incognite nelle equazioni proposte, minorandosi corrispondentemente il numero di queste, si chiama *eliminazione* dell' incognite.

(*) Talvolta ciò si esegue anche potendo direttamente pervenirsi all'equazione finale; ma perchè in quel modo si facilita la soluzione del Problema.

354. Da quel che fu già detto si rileva, che le equazioni proposte per l'eliminazione, debbano essere *separate* tra loro, cioè che non ve ne sia alcuna che derivi per conseguenza di un' altra: perchè in tal caso esse non esprimerebbero già condizioni distinte del Problema, ma una stessa condizione, e 'l Problema per conseguenza, mancando del numero necessario di condizioni per esse determinato, resterà indeterminato.

355. L'importanza di questo argomento delle eliminazioni, e le difficoltà che s' incontrano nel cammino per pervenire all' eliminata, ha fatto sì che gli Analisti si sien molto occupati di esso, donde sono risultati varj metodi più o meno conducenti, anzi più o meno praticabili, secondo i casi diversi, i quali noi qui, per l' eliminazione tra le equazioni di 1.° grado, comprenderemo ne' seguenti due, che chiameremo *Metodo per sostituzione*, e *Metodo d' inserimento*, indicando anche le principali varietà de' medesimi.

METODO PER SOSTITUZIONE.

356. Questo metodo consiste in prendere in una delle equazioni proposte il valore di una incognita, come se le altre fossero grandezze note, ed andarlo poi sostituendo nelle altre, sicchè quell' incognita venga a disparire. O pure si prende in ciascuna equazione il valore di una stessa incognita nelle altre, e questi valori si pareggiano poi tra loro; il qual metodo detto più specialmente di *pareggiamento*, è una immediata conseguenza del precedente con cui l' abbiamo perciò connesso.

E se le nuove equazioni, che debbono anche essere una di meno del numero delle proposte, contengano ancora più incognite, si continuerà ad operare

nel modo stesso poc' anzi detto, fino ad ottenere l' eliminata.

ESEMPIO I.

257. Equazioni date $\left\{\begin{array}{l} a x+b y=c \\ a' x+b' y=c' \end{array}\right.$ (*)

Dalla prima equazione si ha $x=\frac{c-by}{a}$; e questa espressione della x nella y e nelle quantità note a e b sostituita nella seconda equazione darebbe l'eliminata

$$a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c'$$

cioè $(ab'-a'b)\,y=ac'-a'c$

che risoluta darà la $y=\frac{ac'-a'c}{a}$

dal qual valore della y si otterrà poi, per mezzo della sostituzione di esso nell' espressione di sopra trovata per la x, anche il valore di quest' altra incognita.

O pure si risolvano le due equazioni per rispetto ad x, o y, sia per rispetto ad x, si avrà

dalla 1. $x=\frac{c-by}{a}$

dalla 2. $x=\frac{c'-b'y}{a'}$

che perciò dovendo la x avere lo stesso valore nelle

(*) Per simmetria di calcolo, i coefficienti della stessa incognita nelle diverse equazioni si sogliono segnare con le stesse lettere, alle quali per distinguerle si affiggono delle virgolette dette *apici*, come lo mostra questo Esempio, ed i seguenti.

due equazioni, si avrà col pareggiamento di que' secondi membri la seguente elimitata

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$$

che maneggiata convenevolmente, darà come poc' anzi

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

Ed ottenuta l' incognita y, è facile il vedere che resterà determinata la x, con sostituire il valore della y nell' equazione $x=\frac{c-by}{a}$, e nell' altra $\frac{c'-b'y}{a'}$.

ESEMPIO II.

258. Sieno

$$a\,x+b\,\,y+c\,\,z=m$$
$$a'\,x+b'\,y+c'\,z=m'$$
$$a''x+b''y+c''z=m''$$

le tre equazioni proposte. Si prenda in una di esse, nella prima, il valore della x, ch'è $\frac{m-by-cz}{a}$, il quale si sostituisca in ciascuna delle altre due, che diverranno perciò

$$a'\times\frac{a-by-cz}{a}+b'\,y+c'\,z=m'$$

$$a''\times\frac{m-by-cz}{a}+b''y+c''z=m''$$

nelle quali vi sono le sole incognite y, z: e da esse si potrà ricavare, come nell'esempio precedente, i valori di y, z; e per mezzo di questi, e dell'equazione $x=\frac{m-by-cz}{a}$ quello della x.

O pure si prenda in ciascuna di quelle tre equazioni il valore di una stessa incognita x, si avrà

dalla 1. $x=\frac{m-by-cz}{a}$

dalla 2. $x=\frac{m'-b'y-c'z}{a'}$

dalla 3. $x=\frac{m''-b''y-c''z}{a''}$

i quali valori pareggiati tra loro daranno luogo alle due equazioni in x, y, cioè

$$\frac{m-by-cz}{a}=\frac{m'-b'y-c'z}{a'}$$

$$\frac{m-by-cz}{a}=\frac{m''-b''y-c''z}{a''}$$

dalle quali si avranno poi, col metodo stesso, i valori di y, z, e quindi quello della x.

259. Senza moltiplicare esempj, è evidente il progresso dell'operazione per ottener l'eliminata da un qualunque numero di equazioni; e solamente conviene avvertire, che nell'eseguire i pareggiamenti delle diverse espressioni del valore di un'incognita, conviene sempre scegliere, nel pareggiarne due, quelle che posson condurre all'equazione più semplice.

260. Che se nelle equazioni proposte, o in alcuna di esse, non vi si contengano ad un tratto tutte le incognite, in tal caso non fa bisogno di nuove regole pel maneggio delle medesime; ma anzi le operazioni prescritte sopra generalmente vi restano facilitate.

Così se l' equazioni proposte fossero

$$a\,x+b\,y = m$$
$$a'\,x+c'\,z = m'$$
$$b''y+c''z = m''$$

Eliminando la x dalle due prime equazioni, si avrà la seguente equazione in y ec.

$$ma'-ba'y=am'-ac'z$$

la quale combinata colla terza delle proposte, darà i valori per y, z, e quindi poi quello della x.

METODO D' INSERIMENTO.

261. Sieno di nuovo le due equazioni con due incognite

$$a\,x+b\,y = c$$
$$a'x+b'y = c'$$

egli è chiaro, che se fossero uguali i coefficienti a, a' della x, o pur quelli b, b' della y, allora si potrebbe ottenere l' eliminata in y, o in x con la somma o sottrazione delle equazioni proposte, secondo che que' coefficienti uguali si trovavano essere di contrario segno, o pur del medesimo.

Così supponendo $a=a'$, e positivi tali coefficienti, si avrà, per la sottrazione dell' una equazione dall' altra

$$(b-b')y=c-c'$$

Ciò posto è chiaro, che si potrà far uso di questo metodo per ottenere l' eliminata ogni qual volta, essendo disuguali que' coefficienti di una stessa incognita, le equazioni proposte si apparecchino per tal modo da farli divenire uguali.

262. Il primo mezzo che si offre perciò è evidentemente quello d' introdurre per fattore in ciascuna equazione il coefficiente dell' incognita da eliminarsi nell' altra; così l' equazioni proposte, operando in esse per eliminar la x, prenderanno la forma

$$aa'x+ab'y=ca'$$
$$aa'x+ba'y=ac'$$

che per la sottrazione di una dall' altra daranno l' eliminata in y

$$(ab'-ba')y=ac'-ca'$$

Ed al contrario se si fosse voluto far svanire la y, la forma di quelle equazioni sarebbe stata la seguente

$$ab'x-bb'y = cb'$$
$$ba'x-bb'y = bc'$$

e l' eliminata in x sarebbe

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'$$

263. Che se le equazioni proposte fossero state tre come nel n.° 258; in tal caso si eliminerebbe la x col metodo poc' anzi esposto tra esse equazioni due a due, cioè combinandone una con ciascuna delle due altre: si avranno per tal modo due equazioni in y, z, che trattate similmente condurranno a' valori delle tre incognite. E lo stesso si praticherebbe ne' casi che fossero quattro o più le equazioni proposte.

264. Il metodo esposto finora ne' numeri 262, 263 sebbene agevole pel suo andamento, contiene però in

se un inconveniente rimarchevolissimo in alcuni casi, quello cioè d'introdurre de'fattori superflui, nelle equazioni sulle quali si opera l'eliminazione, i quali principalmente trattandosi di equazioni letterali, rendono l'eliminata assai complicata, e soggetta a riducimenti non sempre facili a ravvisarsi; e ciò dipende da che per rendersi uguali i coefficienti di quell'incognita che si vuole eliminare bastava di moltiplicare l'un di questi per un fattore solo del coefficiente dell'altra.

265. Ad evitare un tal inconveniente, si è cercato di andar dritto a rinvenire questo fattore, che bisogna introdurre in una equazione, perchè il coefficiente di un' incognita di questa che vuole eliminarsi divenghi uguale a quello della stessa in un'altra equazione; il che ha dato luogo alla seguente modificazione del poc' anzi esposto metodo

266. Sieno $$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'$$
le equazioni proposte; e dinoti n quel fattore da introdursi nella prima, perchè volendosi eliminata la x dalle due equazioni, sia $an=a'$; si avrà per quella prima equazione l'altra

$$anx+bny = cn$$

dalla quale sottratta la seconda verrà

$$(an-a')x+(bn-b')y = cn-c'$$

Ma la $an=a'$, e quindi $n=\frac{a'}{a}$; ove il fratto $\frac{a'}{a}$ si suppone ridotto a'suoi minimi termini. Adunque per tal sostituzione svanirà effettivamente l'espressione in x, e si avrà l'eliminata in y della seguente forma.

$$\left(\frac{ba'}{a}-b'\right)y=\frac{ca'}{a}-c'$$

cioè $$(ba'-ab')y=ca'-ac'$$

ch' è precisamente la stessa ottenuta di sopra (262).

Che se la n fosse stato al contrario quel fattore che doveva rendere uguali i coefficienti della y per dare l' elimitata in x, allora sarebbe stato $bn-b'=0$, ed $n=\frac{b'}{b}$ ridotto a minimi termini.

267. Or quando fossero tre le equazioni e le incognite, come

$$a\,x+b\,y+c\,z=m$$
$$a'\,x+b'\,y+c'\,z=m'$$
$$a''x+b''y+c''z=m''$$

s' incomincerebbe dall' introdurre in una di esse il fattore n, nella prima per esempio, ed in un' altra il fattore k, che sia la seconda, e poi da ciascuna di queste si sottrarrebbe la rimanente, e si avrebbero per tal modo le due equazioni

$$(a\,n-a'')x+(b\,n-b'')y+(c\,n-c'')z=mn-m''$$
$$(a'k-a'')x+(b'k-b'')y+(c'k-c'')z=km'-m''$$

E volendo che in queste scomparisca la x, rimanendo così due altre equazioni in y, z, bisognerà ad un tratto supporre $an-a''=0$ ed $a'k-a''=0$, le quali equazioni daranno per n e k i valori $\frac{a''}{a}$, $\frac{a''}{a'}$ che sostituiti in quelle equazioni rispettivamente, daranno le ridotte in y, z, dalle quali poi si passerà all' elimitata in una di esse solamente.

E ciascun vede quel che dovrebbesi fare, se volevasi in quelle equazioni eliminare la y, o pur la z, in vece della x.

268. E potrebbesi anche dopo di aver introdotta nella prima il fattore n, e nella seconda l'altro k, sommar queste due insieme, e sottrarne poi la terza, sicchè si abbia l' equazione

$$(an+a'k-a'')x+(bn+b'k-b'')y+(cn+c'k-c'')z$$
$$=mn+m'k-m'' \ldots\ldots\ldots \quad M$$

e supponendo ad un tratto che sia

$$an+a'k-a''=o$$
$$bn+b'k-b''=o$$

col maneggio di queste due equazioni, si avranno tali valori per le incognite n, k, che sostituiti nell'equazione M farebbero svanire i termini affetti da x, y, e resterebbe un'equazione nella sola z, che darebbe il valore di questa incognita.

Ed ognun vede bene da se quello che sarebbe stato uopo fare per aver tale equazione nella sola x o pur nella sola y.

269. Dal detto ne' due precedenti numeri sarà agevol cosa il rilevar la regola da seguire per applicar questo metodo di eliminazione a quattro equazioni con quattro incognite, o anche a maggior numero di equazioni con altrettante incognite.

270. Ed un tal metodo si potrà anche convenevolmente usare nel caso di più equazioni con altrettante incognite, le quali però non si contenghino tutte in ciascuna equazione, come per la forma più generale di esse, o non per altra ragione, abbiamo noi supposto che fossero negli esempli recati di sopra.

271. Considerando attentamente i valori che risultano per le x, y dalle due equazioni del n.° 257, i quali sono i seguenti

$$x=-\frac{b'c-cb'}{ab'-ba'} \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

e gli altri che per le x, y, z si hanno dalle tre equazioni del n.° 258, che sono

$$x = \frac{+(bc'-b'c)m''+(bm'-b'm)c''-(cm'-c'm)b''}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''}$$

$$y = \frac{-(ac'-a'c)m''+(am'-a'm)c''-(cm'-c'm)a''}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''}$$

$$z = \frac{+(ab'-a'b)m''+(am'-a'm)b''+(bc'-b'c)a''}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''}$$

ed a questi due casi aggiugnendo anche le formole rappresentanti i valori di quattro incognite risultanti dal maneggio di quattro equazioni, ciascuna delle quali le comprenda tutte, sarà facile il rilevarne la regola onde comporre tali espressioni, senza aver bisogno di effettuare il calcolo; e questa regola si vedrà poi aver luogo anche quando non avvenga, che le equazioni proposte siano complete per rapporto al numero delle incognite, ove si abbia però l'avvertenza di supporre in ciascuna equazione l'incognita mancante come affetta dal coefficiente *zero*. Ma noi senza impegnarci quì in tal ricerca, ci limiteremo a dare, per quest' oggetto, la bella regola del Signor Bezout, per la quale non solamente si hanno le poc'anzi dette formole generali; ma possonsi esse anche con facilità comporre all' istante, senza nè essere obbligato a ritenerle a memoria, nè ricorrere al libro onde valersene all' uopo (*).

(*) Veggasi la *Teoria generale delle Equazioni numeriche* del Signor Bezout.

REGOLA GENERALE

Per calcolare tutti una volta, o separatamente i valori delle incognite nelle equazioni di primo grado letterali o numeriche.

272. Sia un numero d'incognite x, y, z....... con altrettante equazioni; ed i coefficienti di ciascuna di esse nelle diverse equazioni ridotte a zero sieno rispettivamente a, a', a'' ec. per x; b, b', b'' ec. per y; c, c', c'', ec. per z....... ed m, m', m'' ec. i termini noti.

1.° S'intenda il termine noto in ciascuna equazione moltiplicato anch'esso per un'incognita t; e di tutte quelle incognite e di questa se ne faccia ad arbitrio la combinazione $xyzt$, purchè però una volta combinate con l'ordine che si vede, si conservi esso sempre lo stesso.

2.° Ciò posto si sostituisca in quel prodotto, di volta in volta, invece di ciascuna incognita, il suo coefficiente nella prima equazione, e cambiando il segno ne' termini di luogo pari, si otterrà per tal modo l'espressione

$$ayzt-bxzt+cxyt-mxyz$$

che dirassi *prima linea*.

3.° Indi in questa prima linea si cambj ciascuna incognita contro il suo coefficiente nella seconda equazione, tenendo pe' segni la stessa regola poc'anzi data, sicchè si abbia la *seconda linea*.

$$(ab'-a'b)\,zt-(ac'-a'c)\,yt+(am'-a'm)\,yz+$$
$$(bc'-b'c)\,xt-(bm'-b'm)\,xz+(cm'-c'm)\,xy$$

4. Similmente in questa seconda linea si cambj

ciascuna incognita contro il suo coefficiente nella terza equazione, cioè la x in a'', la y in b'', la z in c'', e la t in m'', continuando a ritenere la stessa regola pe' segni; si avrà la *terza linea*.

$$[(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a'']t-$$
$$[(ab'-a'b)m''-(am'-a'm)b''+(bm'-b'm)a'']z+$$
$$[(ac'-a'c)m''-(am'-a'm)c''+(cm'-c'm)a'']y-$$
$$[(bc'-b'c)m''-(bm'-b'm)c''+(cm'-c'm)a'']x$$

e così si continuerebbe innanzi, se il numero delle equazioni e delle incognite fosse maggiore di tre, fino ad ottenere per un'ultima linea quella il di cui ordine è dinotato dal numero delle equazioni.

[illegible]5. Ottenuta quest'ultima linea, che nel presente caso è la terza di sopra espressa, si otterrà da questa arbitrariamente il valore di quella incognita che si vuole, dividendo il coefficiente di questa (che [illegible] trovasi nelle precedenti linee fatta la riduzione di tutti i termini ove una stessa incognita è fattore comune) per quello che in questa stessa ultima linea si trova appartenente all'incognita introdotta. Sicchè nel caso presente si avrebbe

$$x=\frac{-[(bc'-b'c)m''-(bm'-b'm)c''+(cm'-c'm)b'']}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''}$$

$$y=\frac{+[(ac'-a'c)m''-(am'-a'm)c''+(cm'-c'm)a'']}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''}$$

$$z=\frac{-[(ab'-a'b)m''-(am'-a'm)b''+(b'm-b'm)a'']}{(ab'-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a''}$$

273. Il metodo esposto in questa Regola ha anche il vantaggio di poter dare separatamente quella delle

incognite che si vuole, o alcuna di esse solamente, facilitandosi in tal caso il calcolo delle diverse linee sopraindicate. Poichè in questo caso non bisognerà conservare in ciascuna linea che solamente que' termini in cui contiensi l' incognita che cercasi, e l' incognita introdotta. E volendo solamente i valori di due incognite, x, y senza tener conto delle altre, si terrà solamente conto di que' termini, ove esse e la t s'incontrano; e così in appresso.

274. È ora necessario di far vedere che la regola data di sopra regge ancorchè nelle equazioni proposte non si trovino in ciascheduna tutte le incognite.

Sieno perciò le equazioni

$$ax + by + m = 0$$
$$a'x + c'z + m' = 0$$
$$b''y + c''z + m'' = 0$$

Stabilisco il prodotto $xyzt$, introducendo per moltiplicatore delle m, m' m'' la nuova incognita t; e poi da quel prodotto ricavo la prima linea.

$$ayzt - bxzt - mxyz$$

da questa ottenga la seconda linea

$$-ac'yt + am'yz - ba'zt + bc'xt - bm'xz - a'myz - c'mxy ,$$

o pure, nell' altra forma,

$$-ac'yt + (am' - a'm)yz - ba'zt + bc'xt - bm'xz - c'mxy.$$

Passo quindi alla terza linea

$$-ac'b''t + ac'm''y + (am' - a'm)b''z - (am' - a'm)c''y$$
$$-a'bc''t + a'bm''z - bc'm''x + bm'c''x + b''mc'x$$

o pure ridotta a

$$-(ac'b'' + a'bc'')t + [(am' - a'm)b'' + a'bm'']z -$$
$$[(am' - a'm)b'' - ac'm'']y + [(m'c'' - m''c')b + b''c'm]x$$

dalla quale si ha

$$x = \frac{-[(m'c''-m''c')b+b''c'm]}{ac'b''+a'bc''}$$

$$y = \frac{(am'-a'm)c''-ac'm''}{ac'b''+a'bc''}$$

$$z = \frac{-[(am'-a'm)b''+a'bm'']}{ac'b''+a'bc''}$$

che sono i valori di esse incognite tali quali sarebbero risultati con qualunque altro degli esposti metodi di eliminazione; e che soddisfano alle tre equazioni proposte, ed al Problema ond' esse derivano.

275. Per maggior esercizio nella presente Regola proporremo il seguente esempio di equazioni a coefficienti numerici.

Sieno le quattro equazioni seguenti.

$$2u+3x-8=0$$
$$3u+2y-9=0$$
$$4x+3z-20=0$$
$$2y+z-10=0$$

Formato il prodotto $uxyzt$, la prima linea sarà

$$2xyzt-3uyzt-8uxyz$$

la seconda linea

$$-4xzt+18xyz-9yzt+6uzt-27uyz-24xyz-16uxz$$

o pure

$$-4xzt-6xyz-9yzt+6uzt-27uyz-16uxz$$

la terza linea

$$-16zt+12xt+80xz-24yz-18xy+27yt$$
$$+180yz-18ut-120uz-81uy+64uz-48ux.$$

E finalmente la quarta linea sarà

$$38t+152z+114y+76x+38u$$

Dalla quale si ricava $u=\frac{38}{38}$, $x=\frac{76}{38}$, $y=\frac{114}{38}$

$z=\frac{152}{38}$, cioè $u=1$, $x=2$, $y=3$, $z=4$.

276. Non stimo fuor di proposito di quì notare, che prima del Bezout, anche il Maclaurin diede nel suo *Trattato di Algebra* in due Teoremi generali, una regola generale per ottener le incognite da più equazioni date, senza eseguir le operazioni algebriche indicate ne' due metodi di sopra esposti 256, e 257 e che una tal regola sarebbe anche più agevole e facile che l'altra del Bezout, se non mancasse di quella sua parte importante che riguarda i segni de' termini che costituiscono il numeratore e denominatore de' valori di ciascuna incognita. (*Veg. le pagg.* 86 *ed* 87 *della versione Francese del suddetto libro*).

CAP. V.

Osservazioni sopra alcuni casi delle eliminazioni.

277. Se mai nel cercar l'eliminata di più equazioni con altret'ante incognite, adoperando la regola del Bezout, avvenga che in una linea sparisca alcuna delle incognite, in tal caso le corrisponderà il zero per espressione del suo valore.

Così l'equazioni proposte essendo

$$2x + 4y + 5z - 22 = 0$$
$$3x + 5y + 2z - 30 = 0$$
$$5x + 7y + 4z - 43 = 0$$

si avrà per prima linea

$$2yzt - 4xzt + 5xyt + 22xyz$$

per seconda

$$-2zt + 11yt + 6yz - 17xt + 10xz - 106xy$$

e finalmente per terza

$$-27zt - 81y - 135x$$

nella quale non trovasi più la z; che perciò secondo la regola stabilita al n.° 272.

$$x = \frac{-135}{-27} = 5 \quad y = \frac{-81}{-27} = 3 \quad z = \frac{0}{-27}$$

cioè sarà $z = 0$

Il che dinota che due delle tre proposte equazioni ad arbitrio, soppressavi la z, erano sufficienti alla risoluluzione del Problema cui esse corrispondono; ossia che ciascuna di esse è compresa nelle altre.

278. Un caso il più rimarchevole nelle eliminazioni si è quando nel corso delle operazioni che si fanno per giugnere all' eliminata, si perviene, adoperandovi i metodi esposti ne' numeri 256, e 261 ad equazioni che sono tutte la stessa, cioè identiche; di tal che il loro numero si restringe ad una. In tal caso siccome restano indeterminati i valori delle incognite in questa tale equazione; similmente indeterminato dovrà essere il Problema donde sono tratte quelle equazioni proposte. E ciò deriva da che in tal caso non è che apparentemente il numero delle equazioni quanto quello delle incognite, mentre n' è realmente minore, essendo una o anche più di queste equazioni *socie* con le altre, cioè conseguenze di quelle. E si verrà in cognizione del grado d'indeterminazione del Problema, cioè del numero delle equazioni che sono conseguenza, ossia delle condizioni deficienti, dal vedere quante sono le incognite contenute in ciascuna di quelle equazioni simili di cui si è detto. Di tal che se le incognite sieno due, il Problema mancava di una sola condizione, ed era perciò indeterminato per un grado; se tre, mancavano al Problema due condizioni, e così in seguito. Ma su di ciò noi ritorneremo ad occuparci in appresso, ove si tratterà de' Problemi e delle equazioni indeterminate; e per ora basterà in rischiarimento del già fin qui detto il seguente

ESEMPIO

279. Sieno le seguenti tre equazioni

$$2x+3y+5z+6=0$$
$$3x+y+2z+5=0$$
$$10x+8y+14z+22=0$$

nelle quali la terza evidentemente non è un' equazione

separata, ma connessa con le altre due, derivando dalla somma di queste, di cui ne è il doppio.

Maneggiando tali equazioni con uno de' metodi esposti di sopra, si troverà, che eliminandosi la x dalla 1. e 2. equazione, si perviene ad avere l'equazione

$$7y+11z+8=0$$

e similmente eliminando la stessa incognita tra la seconda e terza equazione si ottiene un' equazione identica alla precedente, il che dimostra l'indeterminazione del Problema cui corrispondono quelle tre equazioni, per un grado.

280. Trattandosi le equazioni proposte colla regola del Bezout si conoscerà che resti indeterminato il Problema allorchè divien zero qualche una delle linee del medesimo; e si conoscerà di qual grado d'indeterminazione esso sia, dal vedere qual linea è quella che risulta identica; di tal che essendo l'ultima, sarà esso indeterminato per un grado, per due se sia la penultima, e così in seguito.

CAP. VI.

Di alcuni Problemi determinati di 1.° grado.

281. Quante volte risolvendo un Problema si perviene ad equazione o ad equazioni con altrettante incognite al primo grado, il Problema dirassi *di primo grado*; ed in generale il grado di un Problema si dirà sempre lo stesso di quello dell' equazione alla quale risolvendolo si perviene, quando però questa sia insuscettiva di abbassamento.

L' esercizio di Problemi che qui recheremo ha un triplice oggetto, cioè quello di confermar ne' giovani le Regole date pel maneggio delle equazioni di 1.° grado ne' due precedenti Capitoli; di manudurli lentamente nell' arte difficile del risolvimento delle quistioni coll' applicazione dell' analisi algebrica; e finalmente di stabilire come conseguenze immediate, o come riflessioni su i risultamenti di taluni Problemi che a proposito recheremo, alcune altre Regole importanti a conoscersi. E questo Capitolo, come ognun vede, sarà pel secondo de' sopraccennati obbietti l' applicazione di quanto fu indicato nel §. 217. Scol. 2.

PROBLEMA I.

282. *Tre donne portano ciascuna un cesto con uno stesso numero di poma, ed incontrandone nove altre, ciascuna di esse dà ad ognuna di queste lo stesso numero di poma dal suo cesto, ed in fine trovansi quelle e queste avere lo stesso numero di poma per ognuna. Si dimanda che parte delle sue poma ha ciascuna delle prime tre data a ciascuna delle seconde nove?*

Soluz. Il numero delle poma di ciascuno de' tre cesti essendo noto si eprima per a; ed essendo ignota la parte che se ne dà a ciascuna delle 9 donne incontrate, questa si chiami x. Da ciò si vede che a quelle tre donne non resta, per ognuna, che $a-9x$ di poma nel cesto; e che ciascuna delle 9, che ne ha ricevuto un numero x da ognuna delle tre, verrà ad averne perciò per sua porzione $3x$. Or si vuole nel Problema, che dopo tal ripartizione risulti lo stesso il numero delle poma di quelle e di queste. Adunque dovrà essere

$$3x = a - 9x$$

equazione al Problema, dalla quale si ha

$$12x = a, \quad \text{ed} \quad x = \frac{a}{12}$$

che dinota che ciascuna di quelle tre donne aveva data a ciascuna delle 9 la dodicesima parte delle poma che essa aveva.

E volendo *verificare* una tal soluzione non bisognerà far altro che procedere cogli stessi passaggi fatti per risolvere il problema, impiegando $\frac{a}{12}$ invece di x. Di fatti le

prime sarebbero restate con poma $a - \frac{9a}{12} = \frac{a}{4}$, e le seconde ne avrebbero avute $\frac{3a}{12} = \frac{a}{4}$; e quindi le une, e le altre lo stesso numero.

PROBLEMA II.

283. *Dimandato uno che ora fosse, rispose; le ore che debbono scorrere per terminare il giorno sono $\frac{4}{3}$ di quelle già scorse. Qual' ora era dunque?*

Soluz. Sieno x l' ore già scorse, quelle a scorrere per terminare l' intero giorno, sarebbero $24-x$; ma queste debbono essere $\frac{4}{3}$ di quelle. Dunque l' equazione al Problema sarà

$$\frac{4}{3}x = 24-x$$

cioè $$7x = 72$$

ed $$x = \frac{72}{7} = 10\,\frac{2}{7} = 10^{or}\ 17' \text{ circa.}$$

PROBLEMA III.

264. *Sono tre numeri, ed il primo aggiunto alla terza parte del terzo è uguale al secondo; questo col terzo del primo uguaglia il terzo; e questo terzo supera il primo per 10. Si dimandano i numeri?*

Sol. Sia x il primo numero; sarà per l' ultima condizione di sopra esposta il terzo espresso da $x+10$

ma il secondo per la prima condizione è $x+\frac{x+10}{3}$; e per l'altra condizione è quanto $x+10-\frac{x}{3}$. Adunque l'equazione al Problema sarà

$$x+\frac{x+10}{3}=x+10-\frac{x}{3}$$

cioè $x+10=30-3x$

e $4x=40$; $x=10$

E quindi il primo numero è 10, il terzo è 20; e 'l secondo $16\frac{2}{3}$.

ALITER.

285. Sia x il primo de' tre numeri proposti, y il condo, z il terzo; avranno luogo le tre seguenti equazioni, ciascuna per ognuna delle tre condizioni di sopra stabilite, cioè sarà

$$1. \quad x+\frac{z}{3}=y$$

$$2. \quad y+\frac{x}{3}=z$$

$$3. \quad x+10=z$$

E sottraendo le due ultime l'una dall'altra, sarà

$$\frac{2x}{3}+10=y, \quad e \quad 2x+30=3y$$

Similmente sommando la terza equazione colla se-

conda ridotta nella forma seguente

$$3x-3y=-z$$

si avrà $$4x+10=3y$$

e paragonando queste due equazioni ottenute, ossia le due diverse espressioni di $3y$ in x ricavate da esse due equazioni, sarà

$$2x+30=4x+10$$

che risoluta darà $x=10$. Quindi con la sostituzione di tal valore in una delle due precedenti equazioni in x, y, si sarà $y=16\frac{2}{3}$. E finalmente dalla terza delle equazioni al Problema si avrà anche dal valore della x quello della z espresso da 20.

286. Il paragone di queste due soluzioni può servir di prova per mostrare, che quando può riescirsi ad ottenere una sola equazione finale ad un Problema che contenga più condizioni ed altrettante incognite, bisogna sempre farlo, riescendo più facile il maneggio di questa sola equazione, che quello di più; e quindi più elegante la soluzione del Problema: poichè l'eleganza di una soluzione algebrica di un Problema aritmetico consiste nell'ottenersi direttamente quell'equazione, che senza ulteriori ripieghi, e col più facil maneggio ne conduca alla determinazione dell'incognita principale stabilita nel Problema.

PROBLEMA IV.

287. *Una vasca riceve l'acqua da tre canali, de' quali il primo da se solo la riempirebbe in un giorno; il secondo in due; il terzo in tre; il quarto in quattro giorni. Si dimanda il tempo in cui quella vasca si riempirebbe dandogli l'acqua i quattro canali insieme?*

Soluz. Sia x un tal tempo; e l'acqua di cui è capace la vasca si dinoti per a. Ciò posto, siccome in un giorno il primo canale dà a di acqua, nel tempo x darà ax. Similmente nel tempo x il secondo canale darebbe $\frac{ax}{2}$, e ciascuno de' due altri darebbe rispettivamente $\frac{ax}{3}$, $\frac{ax}{4}$. Ma queste quantità di acqua data da ciascuno de' quattro canali nel tempo x debbono empir la vasca. Adunque sarà

$$ax + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{3} + \frac{ax}{4} = a$$

ossia, sopprimendo il fattore comune a e moltiplicando l'intera equazione per 12 per liberarla da fratti (251) si avrà

$$12x + 6x + 4x + 3x = 12$$

ossia

$$25x = 12$$

ed

$$x = \frac{12}{25} \text{ di giorno}$$

288. *Scol.* Se da principio la quantità di acqua si fosse espressa con 1, in vece di a, si sarebbe a dirittura ottenuta l'equazione senza questo moltiplicatore da cui ha bisognato liberarla, il che serva di avvertimento pe' casi in cui una quan-

tità data può stabilirsi ad arbitrio di chi risolve la quistione.

PROBLEMA V.

289. *Un mulo ed un asino essendo gravati di barili di vino, fu il primo a dolersi l' asino con dire al mulo io sono sì gravato, che se tu mi dassi un solo de' tuoi barili io ne porterei doppio numero di te; cui il mulo rispose: eh bene danne tu uno a me, e saremo ugualmente caricati. Si dimanda il numero de' barili che ciascun di essi portava?*

Soluz. Sia x il numero de' barili de' quali era gravato il mulo; in tal caso secondo il discorso fattogli dall' asino, questo avrebbe un numero di barili espresso da $2x-3$; ma per la risposta del mulo all' asino, togliendosi da questa quantità un barile, ed aggiugnendosi all' altra x, risultavano essi ugualmente caricati. Adunque sarà

$$2x-4 = x+1$$

ed

$$x = 5$$

Cioè il mulo portava 5 barili, e l' asino 7.

PROBLEMA VI.

290. *Un Professore dimandato che numero di giovani avesse, rispose: la loro metà, insieme col terzo e con la quarta parte differiscono dall' intero numero de' miei giovani per* 10. *Si cerca qual fosse un tal numero di allievi?*

Soluz. Sia x quel numero di giovani sarà l'equa-

zione al presente Problema

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+10=x$$

cioè $9x+4x+3x+120=12x$

ed $x=-120$.

291. *Scol.* Il risultamento di questo Problema è un valore negativo per la x, il quale soddisfa all'equazione donde si è ricavato, rendendosi uguali effettivamente i due membri della medesima col sostituire -120 ad x; ma intanto conviene esaminare cosa dinoti un tal valore negativo dell'incognita in rapporto al Problema proposto. Or se riflettasi sulla condizione del proposto Problema, e quindi sull'equazione del medesimo, si rileverà facilmente che le tre parti del numero de' giovani, che si disegnano dal Professore, già sono maggiori dell'intero numero, mentre $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}$, di una quantità sono maggiori di essa; che perciò è contraddittorio il volere che con queste più 10 si produca il numero: e ciascun vede, che il Problema si ridurrebbe possibile, se si dicesse al contrario che quelle tre parti superavano il numero dei giovani per 10; nel qual caso risulterebbe pel numero cercato $+120$. Adunque un valore negativo dell'incognita in questa specie di equazioni indica, che la quistione in quel modo proposta non può aver luogo, includendo una contraddizione, che per toglierla bisogna convenevolmente cambiar qualche cosa nell'enunciazione del Problema nell'opposto.

PROBLEMA VII.

292. *Si dimanda un tal numero che dal suo doppio sottrattone 1, e dal doppio di questo residuo sottrattone 2, e finalmente diviso tal secondo residuo per 4, questo quoziente sia quanto il numero cercato meno 1.*

Sol. Sia x quel numero; sarà $2x-1$ il primo residuo; $4x-4$ il secondo; ed $x-1$ il quoziente di esso diviso per 4; ond'è, che l'equazione al proposto Problema sarà

$$x-1=x-1$$

293. *Scol.* Questa specie di equazione dicesi *identica*; e da essa, come si vede, in nessun modo può determinarsi valore della x; e ciò deriva da che in effetto quel numero deve restare indeterminato e generale; mentre ciò che nel proposto Problema si dimanda, non già ad un numero speciale; ma bensì a tutti i numeri generalmente si compete; ossia che al proposto Problema può soddisfarsi con un qualunque numero. Di fatti pongasi 7 per la x, e preso di 7 il doppio meno 1, cioè 13, e di questo il doppio meno 2 cioè 24; un tal numero diviso per 4 darà per quoziente 6, che è minore per 1 del numero 7.

Adunque ne' casi che l' equazione alla quale si perviene risolvendo un Problema algebricamente sia identica, il proposto Problema diviene un teorema, cioè quello che in essa si cerca è una proprietà del soggetto in quistione; e di fatti il Problema di sopra proposto può nel seguente modo trasmutarsi in

TEOREMA.

Se il doppio di un numero si minori di 1; ed il doppio di questo residuo minorato di 2 si divida per 4; si otterrà per quoziente un numero minore del proposto per 1.

294. Bisogna però avvertire, che per esser giusta la conseguenza che noi abbiamo dedotta dall'osservare che risolvendo un Problema si giugneva ad una equazione identica, conviene che la soluzione del medesimo siasi convenevolmente condotta, senza mai essersi tenuto conto due volte di una stessa condizione; perchè in tal caso l'identicità dell'equazione finale non già da una proprietà generale del soggetto in quistione dovrà derivarsi; ma bensì dalla condotta non esatta tenuta in risolvere il Problema.

CAP. VII.

DELLA NATURA DELLE EQUAZIONI DI 2.° GRADO, E DELLA MANIERA DI RISOLVERLE.

295. Se si abbiano le due equazioni ridotte a zero

$$x - m = o$$
$$x - n = o$$

il loro prodotto $x^2 - (m+n)x + mn = o$

rappresenterà, come si vede, un'equazione di secondo grado ridotta anche a zero, e *completa*; poichè ne' termini di essa gradatamente si discende dall' esponente 2 dell'incognita fino all'esponente zero, dal quale si concepisce affetta l'incognita x nel termine noto mn. E se in un caso sia $m = -2$, e quindi $m+n=o$, l'equazione di sopra esposta prenderà la forma

$$x^2 - m^2 = o$$

mancante del secondo termine, e che dicesi *pura*.

296. Ogni equazione di secondo grado nasce dunque dal prodotto di due di primo grado ridotte a zero, ciascuna della forma $x - m = o$; e se mai avvenga che i termini noti di questi fattori sieno uguali e di segno contrario, in tal caso l'equazione risulterà *pura*.

297. Or siccome ponendo l' m per la x nell' un di quei fattori, e l' n per x nell' altro di essi, l' uno e l' altro divien zero effettivamente; dovrà perciò in

ciascuno di questi due casi svanire anche l'equazione di secondo grado che da quelli risulta, e ciò anche intuitivamente osservasi eseguendo tal sostituzione; che perciò: *Ogni equazione di secondo grado ridotta a zero svanisce effettivamente in due casi, cioè con due valori distinti che ha la sua incognita, e dipendenti dalla natura dell' equazione.* Questi tali valori dell'incognita, che fanno svanire l' equazione, diconsi ordinariamente sue *radici*.

298. Oltre questi due valori che soddisfano all' incognita in un' equazione di secondo grado, non può esservene altro che adempia lo stesso oggetto. Poichè se suppongasi esser questo dinotato da p; un tal valore sostituito all' incognita in quell' equazione darà

$$p^2-(m+n)p+mn=0$$

e questa nuova equazione sottratta dalla proposta ne offrirà l' altra

$$x^2-p^2-(m+n)\ (x-p)=0$$

che divisa pel fattore $x-p$ si ridurrà ad

$$x+p-(m+n)=0$$

cioè

$$x+p=m+n$$

Ed era la x uguale ad m, o pure n; adunque necessariamente p dovrà pareggiare n o m. Vale a dire che oltre que' due valori l' incognita non potrà averne altro che soddisfi all' equazione

299. Per piccola riflessione che facciasi sull' equazione risultata nel n°. 295, che come si disse può generalmente rappresentare un' equazione generale di secondo grado, sarà facile ad accorgersi che in essa *il coefficiente della x, cioè del secondo termine sia quanto la somma delle radici dell' equazione col segno contrario; e che il termine noto della medesima venghi espresso dal prodotto di quelle medesime radici col pre-*

prio segno. Ma su di ciò noi dovremo tra poco ritornare, e nella teorica generale delle equazioni dovremo poi universalmente stabilire la regola della composizione de' coefficienti di ciascun termine di un'equazione dalle radici della medesima.

300. Premesse queste considerazioni intorno alla natura delle equazioni di 2.° grado, passiamo ora alla ricerca de' mezzi onde risolverle.

Ed in primo luogo è chiaro che l'equazione *pura*

$$x^2 - b = o \text{ , o } x^2 = b$$

si risolva con estrarre la radice da ambo i membri, donde si avrà

$$x = \pm \sqrt{b}$$

cioè i due valori della x, o le due radici di una tale equazione saranno $+\sqrt{b}$, e $-\sqrt{b}$, ed esse soddisfano, come è evidente, all'equazione, ed alle condizioni stabilite nel n.° 299.

301. Sia ora l'equazione completa

$$x^2 + ax + b = o$$

ove le a e b sieno quantità positive o negative come si vuole, il che dà all'equazione proposta le quattro forme seguenti, cioè l'identica ad essa anche ne' segui

$$2^a. \ x^2 - ax + b = o$$
$$3^a. \ x^2 + ax - b = o$$
$$4^a. \ x^2 - ax - b = o$$

Si trasporti nell'equazione proposta il terzo termine b nel secondo membro, ond' essa divenga

$$x^2 + ax = -b$$

che può anche porsi sotto la forma

$$x^2 + 2x \times \frac{a}{2} = b$$

ove si vede che il binomio costituente il primo membro è composto del quadrato del numero x, e del doppio prodotto di tal numero nell' altro $\frac{a}{2}$; che perciò se ad esso binomio si aggiugnesse il quadrato di questo $\frac{a}{2}$, il trinomio che ne risulterebbe sarebbe il quadrato di $x+\frac{a}{2}$ (153). Si aggiunga dunque, per non turbare l' equazione proposta, il quadrato di $\frac{a}{2}$ ad ambo i membri di essa, onde risulti

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b$$

ed in seguito estratta da' medesimi la radice quadrata, sarà

$$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$$

ed $$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$$

cioè le due radici dell' equazione proposta saranno

$$-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$$

$$-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$$

302. E volendo anche dinotarle com' esse risultano dalle tre altre forme sopraindicate, si avrà dalla

2. $x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$

3. $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$

4. $x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$

e ciascuna di tali radici si vedrà con la sostituzione soddisfare all' equazione cui corrisponde; ed essere anche tali da adempiere alle condizioni espresse nel n.° 299.

303. Sicchè la regola per risolvere un' equazione completa di 2.° grado si è di: *Passare nel secondo membro il termine noto della medesima; di completare il quadrato nel primo membro, aggiungnendovi al binomio che lo rappresenta il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine dell' equazione, che per non turbarla si aggiugne anche al secondo membro di essa. Finalmente estratta la radice da ambo i membri così apparecchiati, si trasporti il termine noto dal primo membro nel secondo, si avranno in tal modo i due valori dell' incognita.* E qui basta solamente l' avvertire che il primo termine dell' equazione che si risolve, cioè quello ove trovasi x^2 debba esser libero da divisori, e da qualunque moltiplicatore altro che $+1$; e la maniera di ridurvelo in caso che nol fosse la somministra la Regola IV. n.° 243.

304. Partendo dalla natura delle radici delle equazioni di secondo grado assegnata nel n.° 299. si potrebbe anche pervenire alla determinazione delle medesime nel seguente modo.

Sia l' equazione $x^2 \pm ax \pm b = o$

e le radici di essa sieno m ed n, sarà

$$m+n=\mp a$$

ed

$$mn=\pm b$$

Ed elevando a quadrato la prima di queste due ultime equazioni, sarà

$$m^2+2mn+n^2=a^2$$

e da questa sottrattone il quadruplo della seconda di esse, cioè $4mn=\pm 4b$

sarà

$$m^2-2mn+n^2=a^2\mp 4b$$

ossia estratta da questa equazione la radice, sarà

$$m-n=\pm\sqrt{(a^2\mp 4b)}$$

che combinata di nuovo con l'altra

$$m+n=\mp a$$

darà

$$m=\frac{\mp a\pm\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

ed

$$n=\frac{\mp a\mp\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

cioè

$$m=\frac{-a+\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

ed

$$n=\frac{-a-\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

o pure al contrario

$$m=\frac{-a-\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

ed

$$n=\frac{-a+\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

305. Dall' ispezione di queste radici, qualunque siasi

il metodo col quale si sono esse ottenute, si potrà dedurre la seguente regola per ricavarle da un' equazione completa di 2.° grado senza maneggiarla.

L' incognita in un' equazione di secondo grado completa è uguale alla metà dal coefficiente del secondo termine, col segno contrario, alla quale, per uno de' valori di essa incognita, sia aggiunta, per l' altro ne sia tolta la radice quadrata del quadrato di tal metà di coefficiente accresciuto del terzo termine dell' equazione col segno contrario.

Di modo che se l' equazione fosse la seguente

$$x^2+4x-6=0$$

le sue radici sarebbero

$$x=-2\pm\sqrt{(4+6)}=-2\pm\sqrt{10}$$

306. Avendo di sopra osservato che l' equazioni complete di 2.° grado possono presentarsi sotto quattro diverse forme dipendenti da' segni onde sono affetti il secondo e terzo termine di esse, conviene ora indagare quali modificazioni ciò possa indurre nella natura delle radici delle medesime. Presa perciò la formola generale di esse radici, che si è veduto essere

$$x=\frac{\mp a\pm\sqrt{(a^2\mp 4b)}}{2}$$

ognun rileva facilmente, che sarà sempre reale il radicale che è l' un de' termini del valore della x se in esso si abbia $+4b$; o pure che ritrovandosi $-4b$, sia questa quantità minore di a^2. *Adunque un' equazione di secondo grado in cui il terzo termine sia negativo* (nel qual caso passato al secondo membro si presenta positivo) *avrà le due radici reali. E queste lo saranno pure reali, in caso che essendo positivo quel ter-*

zo termine, il quadruplo di esso sia minore del coefficiente del secondo termine. Che se in questo caso quel quadruplo del terzo termine pareggi il coefficiente del secondo termine, svanirà il radicale, e l'equazione avrà due radici uguali e di segno contrario ciascuna espressa dalla metà del coefficiente del secondo termine; e ciò avviene quando l'equazione proposta ridotta a zero era già un quadrato perfetto, sicchè non v'era bisogno per risolverla dell'ordinario metodo di sopra esposto; ma bastava estrarne da essa la radice quadrata, come è nel caso dell'equazione

$$x^2 \pm ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

che dà all'istante, estraendone la radice

$$x \pm \frac{1}{2}a = 0$$

ed

$$x = \mp \frac{1}{2}a$$

307. Dopo ciò ci resta a considerare il caso che l'equazione proposta avendo il terzo termine espresso da $+b$, sia $4b > a$; in tal caso quel radicale sarà immaginario, e tali perciò le due radici dell'equazione, le quali in questo caso saranno della forma

$$x = \frac{\mp a + \sqrt{(4b - a^2)}\sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{\mp a - \sqrt{(4b - a^2)}\sqrt{-1}}{2}$$

e quindi i fattori immaginarj di quest'equazione saranno

$$\frac{x \pm a - \sqrt{(4b - a^2)}\sqrt{-1}}{2} = 0$$

ed

$$\frac{x \pm a + \sqrt{(4b - a^2)}\sqrt{-1}}{2} = 0$$

della forma stabilita nel n.° 144. *Esemp.* 11.

308. Cada inoltre l' equazione proposta ne' casi in cui le sue radici sieno reali, di tal che si supponga $\sqrt{(a^2 \mp 4b)}$ espressa da c, saranno le due radici di essa dinotate da

$$x = \frac{\pm a + c}{2}$$

ed

$$x = \frac{\pm a - c}{2}$$

309. In questi casi se l' a è positiva e maggiore di c, le radici saranno entrambe positive, e se minore di c, una ne sarà positiva, l' altra negativa. Al contrario se l' a è negativa e minore di c, l' una delle radici sarà positiva, l' altra negativa; se maggiore di c le radici saranno negative entrambe.

310. Dunque: *un' equazione di secondo grado a radici reali, se ha il secondo termine affetto dal segno — può avere le sue radici o tutte due positive, o una positiva, l'altra negativa; se poi il secondo termine è affetto dal +, le radici di tal equazione o saranno tutte due negative, o una positiva l' altra negativa.*

In questi casi però ultimamente considerati le radici essendo possibili, tale è anche il Problema cui esse corrispondono; e solamente è da avvertirsi, che le radici negative dinotano che può anche un numero astratto

di natura negativo assolutamente soddisfare alle condizioni del Problema proposto; o pure, ch'esse soddisfano, mutate in positive, al Problema quando una qualche cosa nelle sue condizioni si cambj nell'opposto, e ciò verrà rischiarato negli esempj che addurremo: quando poi le radici sieno immaginarie, ciò denota che il Problema donde derivano, o cui corrisponde l'equazione alla quale esse appartengono sia impossibile.

CAP. VIII.

Alcuni Problemi aritmetici di 2.° grado.



312. Dal già detto finora in più di un luogo si può cominciare a rilevare che la natura de' Problemi riposta nell' equazione alla quale essi conducono dipenda dal numero delle soluzioni, ossia delle espressioni algebriche che potranno soddisfare alle condizioni di esso, di tal che l' equazione ad un Problema debba risultar di primo grado quando al voluto in esso non può soddisfarsi che in un sol modo, ossia con un solo numero; e che debba essere del secondo l' equazione ad un Problema, tutte le volte che alle condizioni del medesimo può soddisfarsi in due modi, ossia con due diverse espressioni algebriche; e ciò sarà nel proseguimento di quest' opera confermato coll'analisi che stabiliremo sulle equazioni di grado superiore, ed i Problemi onde dipendono. Ma per ora è necessario di rischiarare una tal cosa con qualche esempio.

PROBLEMA I.

313. *Si cerca un tal numero, che il prodotto di esso più* 5, *per esso meno* 5 *sia* $=96$.

Sia x il numero cercato; l' equazione al Problema sarà

$(x+5)\times(x-5)$, cioè $x^2-25=96$

$$x^2=121$$

$$x=\pm 11$$

Sicchè ad un tal Problema soddisfa il numero $+11$. Di fatti

$$11+5=16$$
$$11-5=6$$

e $$16\times 6=96.$$

E siccome la natura di un prodotto positivo è tale che esso può risultare anche da due numeri negativi per fattori; perciò l'equazione al Problema doveva anche comprendere questo caso, e di fatti l'equazione ad esso risoluta ha dato l'altro numero -11, col quale si ha per un de' fattori del prodotto 96, $-11+5=-6$, e per l'altro $-11-5=-16$. In molti casi però questa soluzione negativa si rigetta assolutamente, essendo paradossa l'idea negativa di quella quantità ch'essa rappresenta, e noi non tralasceremo di far ciò manifesto col seguente

PROBLEMA II.

314. *Alcuni negozianti stabiliscono un agente per un loro commercio in società con la condizione tra loro che ciascun associato contribuisca tante volte 10 scudi, quanto è il loro numero. Il profitto dell'agente è fissato a due volte tanti scudi, quanti associati vi sono per ogni 100 scudi. E se si moltiplica la $\frac{1}{100}$ parte del suo guadagno totale per $2+\frac{2}{9}$ si avrà il numero degli associati. Si dimanda qual sia un tal numero?*

Sia questo numero $=x$; e poichè ciascun asso-

ciato ha somministrato $10x$, il capitale intero sarà $=10xx$. Or per ogni cento scudi l'agente guadagna $2x$; il suo profitto è dunque $\frac{1}{5}x^2$ pel capitale $10x^2$. La $\frac{1}{100}$ parte di questo guadagno è $\frac{1}{500}x^3$, che moltiplicata per $2+\frac{2}{9}$, o pure $\frac{20}{9}$, dà $\frac{20}{4500}x^3=\frac{1}{225}x^3$; la quale espressione deve pareggiare il numero x degli associati. Si ha quindi l'equazione

$$\frac{1}{225}x^3 = x$$

ossia

$$x^3 = 225x$$

la quale sebbene sembri apparentemente del terzo grado; pure perchè si può dividere per x si riduce subito ad

$$x^2 = 225$$

ed

$$x = \pm 15$$

315. La prima di queste radici cioè $+15$ soddisfa al problema, ed è il numero che cercavasi degli associati, ciascun de' quali ha perciò contribuiti 150 scudi. L'altra -15 è un numero negativo che soddisferebbe al Problema, se fosse stato proposto su numeri astratti; ma trattandosi dell' espressione del numero di uomini associati, la radice -15 niente significa, e quindi si trascura.

PROBLEMA III.

316. *Dividere un numero dato a in modo che il prodotto delle sue parti sia $=b^2$.*

Si dinoti per x l'una delle parti del numero dato

a, l'altra verrà espressa da $a-x$, l'equazione al Problema sarà

$$ax - x^2 = b^2$$

cioè $$x^2 - ax = - b^2$$

e quindi $$x = \frac{+a \pm \sqrt{(a^2-4b^2)}}{2} \quad (305)$$

sicchè una delle parti di tal numero potrà essere (prendendo il primo de' valori ottenuti per la x) espressa da $\frac{+a+\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}$, ed allora l'altra parte sarebbe $\frac{+a-\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}$; ed al contrario prendendo per l'una delle parti quella dinotata dalla seconda radice che è $\frac{+a-\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}$, l'altra si troverebbe espressa da $\frac{+a+\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}$, cioè a dire ch' esse si scambiano tra loro a vicenda.

317. *Scol.* Un tal Problema ha reali e positive tutte due radici quando $4b^2<a^2$, cioè $2b<a$: pareggiandosi queste due quantità, in tal caso i due valori della x si fanno uguali ciascuno alla metà del numero dato a, ed il prodotto loro diventa il massimo come l'è anche noto dal libro 2.° degli Elementi di Euclide; e divenendo $4b^2>a^2$, cioè $2b>a$ le due radici dell' equazione al Problema divengono immaginarie, il che dinota, che il Problema sia impossibile, come chiaramente si vedeva dover avvenire dal precedentemente detto, e dallo stesso 2.° libro degli Elementi citati.

PROBLEMA IV.

318. *Dato un numero a, ritrovarne un altro, al quale se si aggiunga esso a, e tal somma si moltiplichi per lo stesso numero cercato, ne risulti il prodotto b^2.*

Sia x il numero cercato, sarà la seguente l'equazione al Problema

$$(x+a)\times x\text{, cioè } x^2+ax=b^2$$

ed $$x=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}\quad(305)$$

de' quali valori della x uno è evidentemente negativo, l'altro positivo. Questo si vede chiaramente che soddisfi al Problema, l'altro soddisfa all'equazione; ma non è ugualmente chiaro come possa soddisfare al Problema.

319. Se però riflettasi, che la sottrazione di sua natura non è che una somma, si concepirà subito che tal Problema proposto doveva dare per la sua soluzione completa, anche quella del caso in cui dalla quantità cercata sottratta la data a, il prodotto di tal differenza per la stessa quantità cercata fosse b^2; ed a questo caso precisamente soddisfa la radice negativa $\frac{-a-\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}$; di fatti se da essa, presa positivamente, se ne sottragga a, darà $\frac{a-\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}$ ch' è una quantità che moltiplicata per la stessa $\frac{-a-\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}$ presa positivamente, si ottiene per prodotto b^2.

SCOLIO.

320. Se taluno trovasse che mi sia troppo trattenuto nell'esame delle radici delle equazioni, e quindi de' Problemi di secondo grado; mentre effettivamente trattandosi di Problemi aritmetici i soli valori positivi dell'incognita sono quelli di cui si tien conto per la soluzione del Problema; dirò di aver ciò fatto, 1°. Per continuar, giusta il proposito esposto nel principio di questo Capo a far comprendere che l'equazione ad un Problema è necessariamente connessa con la natura del medesimo; e che vi è una corrispondenza tra il grado di quella ed il numero de' casi o soluzioni diverse delle quali il Problema è suscettivo, della qual cosa per l'importanza della medesima non tralascerò in appresso di continuare ad occuparmi. Di più ho anche ciò fatto per vendicar l'Analisi moderna dal torto che trovo essergli stato fatto da taluni Analisti, che ne' loro trattati di *Applicazione dell' Analisi algebrica alla Geometria*, in problemi di questa natura, ove non può senza taccia trascurarsi di costruire tutte le radici possibili, si sono contentati semplicemente, al più di occuparsi alla costruzione di una semplice radice positiva, trascurando assolutamente tutte le altre. Ma su questo difetto de' medesimi mi riserbo a parlare con maggiori particolareggiamenti nel II° volume del presente Corso, ove dell' *Analisi Algebrico-geometrica* mi sono proposto di trattare.

321. Quantunque dell' eliminazione tra equazioni composte debba trattarsene altrove a disteso, non ho stimato però sconvenevole il recar qui qualche Problema che conduce ad equazioni tali, che l'eliminata di esse

può facilmente ottenersi con metodi particolari, assai ingegnosi e degni di essere attentamente considerati, tanto più che già si trova di ciò dato un esempio nel n°. 304. In tal modo i giovani si cominceranno di buon ora ad aguzzare l' intendimento per gli artifizj di analisi che convenevolmente adoperati possono con vantaggio guidarli nella determinazione de' valori dell' incognita.

PROBLEMA V.

322. *Ritrovare tre numeri, dati i tre quozienti che nascono da ciascun prodotto di due di essi diviso pel terzo.*

Sieno a, b, c i tre quozienti dati, e si dinotino per x, y, z i tre numeri cercati, avranno luogo le tre seguenti equazioni al Problema

I. $$\frac{xy}{z}=a$$

II. $$\frac{xz}{y}=b$$

III. $$\frac{yz}{x}=c$$

Dalle quali equazioni si avranno, moltiplicandole due a due, le altre tre seguenti, cioè

$$x^2=ab \quad , y^2=ac \quad , z^2=bc$$

ossia $$x=\pm\sqrt{ab},\ y=\pm\sqrt{ac},\ z=\pm\sqrt{bc}$$

PROBLEMA VI.

323. *Ritrovar due numeri de' quali sia noto il prodotto, e la differenza de' loro quadrati.*

Chiamando a^2 la differenza di que' quadrati, e b^2 il prodotto dato; le equazioni al Problema presente saranno

$$x^2-y^2=a^2$$
$$xy\ =b^2$$

e moltiplicando i termini di questa seconda equazione, per $2\sqrt{-1}$, e poi sommandola alla prima, si avrà

$$x^2+2y\sqrt{-1}-y^2=a^2+b^2\sqrt{-1}$$

cioè $$(x+y\sqrt{-1})^2=a^2+b^2\sqrt{-1}$$

ed $$x+y\sqrt{-1}=\pm\sqrt{(a^2+b^2\sqrt{-1})}$$

Similmente si sottragga quella seconda equazione apparecchiata nel sopraddetto modo dalla prima, si perverrà ed avere

$$x-y\sqrt{-1}=\pm\sqrt{(a^2-b^2\sqrt{-1})}$$

Adunque sommando una volta queste due ultime equazioni, ed un' altra volta sottraendo l' una dall' altra e dividendo il primo risultamento per 2, e'l secondo per $2\sqrt{-1}$ si avrà

$$x=\frac{\sqrt{(a^2+b^2\sqrt{-1})}+\sqrt{(a^2-b^2\sqrt{-1})}}{2}$$

$$y=\frac{\sqrt{(a^2+b^2\sqrt{-1})}-\sqrt{(a^2-b^2\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}$$

E questi valori di x ed y sebbene in forma d' immaginarj, sono però quantità reali, come si rileva dal n°.

221. ; e vi ha anche de' casi ne' quali da ciascuno di que' binomj sotto il segno radicale si può estrarre le radice, come a suo luogo faremo vedere.

324. Finalmente recherò anche qui come un'esercizio delle equazioni di 2°. grado la dimostrazione della formola di Halley di cui ho fatta parola nello Scolio al n°. 208.

Si voglia estrarre per approssimazione la radice n dal binomio $x^n \pm a$. È chiaro che tal radice dovrà essere espressa da $x+p$ indicando p la quantità di cui deve essere accresciuta o diminuita la radice n della x^n allorchè questo è aumentato, o diminuito di a. Sarà dunque

$$x+p=\sqrt[n]{(x^n \pm a)}$$

e quindi $$(x+p)^n = x^n \pm a$$

ossia $$x^n + nx^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}p^2 \ldots\ldots\ldots \text{ec.} = x^n \pm a$$

E supponendo la p sì piccola che si possano effettivamente trascurare tutti i termini ove essa s'incontra a potenza superiore al quadrato, si avrà, cancellando le x^n ne' due membri della precedente equazione

$$nx^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}p^2 = \pm a$$

la quale equazione ordinata per rapporto a p come incognita sarà la seguente

$$p^2 \pm \frac{2x}{n-1} = \pm \frac{2a}{(n^2-n)x^{n-2}}$$

che risoluta darà

$$p=\frac{n-2}{n-1}x+\sqrt{\left[\frac{x^2}{(n-1)^2}\pm\frac{2a}{(n^2-n)x^{n-2}}\right]}$$

e quindi

$$\sqrt[n]{(x^n\pm a)}=\frac{n-2}{n-1}x+\sqrt{\left[\frac{x^2}{(n-1)^2}\pm\frac{2a}{(a^2-n)x^{n-2}}\right]}$$

nella qual formola il radicale che vi si comprende è quadratico, e di esso il primo termine è un quadrato perfetto, e'l secondo l'è una frazione tanto più piccola, quanto più da principio si era presa piccola la a in paragone della x.

325. *Scol.* L'Halley nella sua Memoria da noi citata al n.° 208 non recò intorno al presente argomento che semplicemente alcune formole particolari, avendo a dirittura taciuta la formola generale sopraindicata, dopo l'esposizione della quale noi anche passeremo qui appresso a darne, come un'applicazione, alcuna di quelle.

$$\sqrt[3]{(x^3\pm a)}=\frac{1}{2}x+\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2\pm\frac{a}{3x}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(x^4\pm a)}=\frac{2}{3}x+\sqrt{\left(\frac{1}{9}x^2\pm\frac{a}{6x^2}\right)}$$

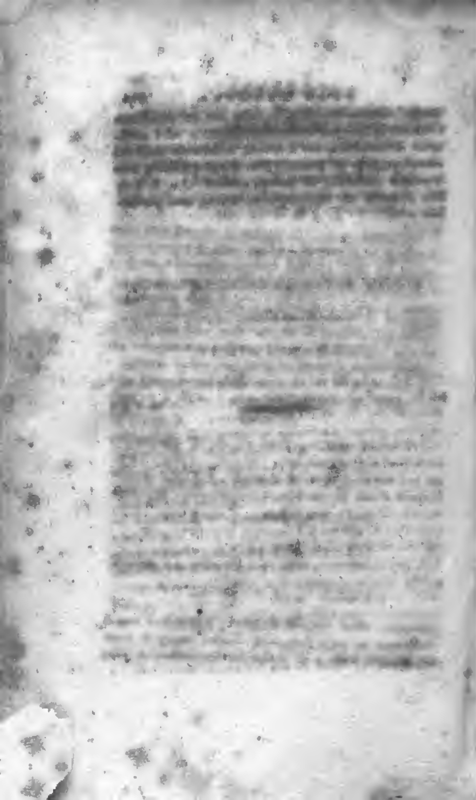
$$\sqrt[5]{(x^5\pm a)}=\frac{3}{4}x+\sqrt{\left(\frac{1}{16}x^2\pm\frac{a}{10x^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(x^6\pm a)}=\frac{4}{5}x+\sqrt{\left(\frac{1}{25}x^2\pm\frac{a}{15x^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(x^7\pm a)}=\frac{5}{6}x+\sqrt{\left(\frac{1}{36}x^2\pm\frac{a}{21x^5}\right)}$$

E sarà facil cosa il procedere innanzi nella composizione di queste formole particolari senza nè meno eseguire la sostituzione del valore di n nella formola ge-

nerale, rendendosi chiara la legge con cui procedono i termini di ciascuna formola particolare, ed i coefficienti de' medesimi, ove si avverta soltanto che quelli del secondo termine del binomio sotto al segno radicale sono la somma continuata de' numeri naturali 1, 2, 3, 4 ec. fino a quello che rappresenta in ciascun caso particolare $n-1$.



DELL' ALGEBRA

LIBRO III.

TEORICA GENERALE DELLE EQUAZIONI.

INTRODUZIONE.

326. Allorchè nel libro precedente abbiamo trattato delle equazioni di secondo grado, che sono le più semplici tra le equazioni composte, si è cercato di stabilire quanto concerneva la natura delle medesime; conviene ora trattar questo argomento generalmente, ossia per una qualunque equazione composta, poichè su tali ricerche poggia il risolvimento delle medesime, il quale forma la base dello scioglimento de' Problemi, oggetto di ogni ricerca matematica, e dell' Analisi in generale. Nè sembri a taluno che ciò che si è esposto intorno alle equazioni di 2. grado si ritrovi or superfluo, perchè compreso nelle ricerche che imprenderemo, poichè oltre al doverci quelle particolari considerazioni servir di preliminare in più di un luogo del presente argomento, esse valeranno anche a rischiararlo e comprovarlo.

Solamente è necessario di qui avvertire, che per restringerci ne' limiti di una istituzione elementare, e

per render quindi questo nostro libro accetto a' giovani che debbono apprender l' analisi moderna, ed utile nel tempo stesso, noi ci limiteremo ad esporre quelle sole dottrine intorno alla teorica delle equazioni, che debbono nel proseguimento servirci per istabilir quelle regole certe onde poterle poi risolvere; quindi sarà da noi tralasciata ogni qualunque ricerca dovesse senza applicazione veruna restare.

Credo poi non inutile in questo studio elementare, nè dispiacevole pe' nostri giovani italiani, il ricordar loro di tanto in tanto quello che nel presente argomento sia stata opera de' nostri sommi ingegni; o pur che da questi, nell' oscurità in cui era la scienza ne' suoi primordj, è stato adombrato, che deve riputarsi anche più difficile di averlo poi gli stranieri universalizzato. Sarebbe ormai tempo, che noi rivindicassimo quello che c' è stato ingiustamente tolto; e che essendo stati i primi a conoscere la moderna analisi, e ad insegnarla agli altri, non ci facessimo da essi rimproverare di avergliela tramandata senza aumento.

E le cose che a questo proposito dirò in più di un luogo insiem raccolte potranno servire a mostrare in quale stato gl' Italiani abbiano trovata l' Analisi moderna, per ciò che riguarda maneggio di equazioni, allorchè dagli Arabi la trasportarono nelle loro regioni: quali progressi le abbiano fatto fare per questa parte; e quanto loro appartenga dello stato in cui presentemente ritrovasi.

CAP. I.

Della natura e delle proprieta' delle equazioni composte.

TEOREMA I.

327. *Ogni espressione algebrica della forma*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + ec$$

può sempre considerarsi come il prodotto de' fattori semplici $x+a$, $x+b$, $x+c$......... *al numero* m (*).

Una tal verità è facile a rilevarsi da' numeri 181. e 182.

328. *Scol.* E volendosi distendere su quei principj poc' anzi indicati una dimostrazione al presente Teorema, si potrebbe dire, che: » siccome il prodotto » di m fattori della forma $x+a$, $x+b$, $x+c$..... deve » essere una formola al grado m pariforme alla propo» sta; così volendo che questa sia identica a quel » prodotto, dovranno essere identici i coefficienti delle » stesse potenze della x ne' termini delle due formole. » E siccome questi generalmente sono al numero m, » quante sono le incognite a, b, c....., così verranno » a stabilirsi m di equazioni, cioè m di rapporti tra » le incognite a, b, c......., e le quantità note A,

(*) Le quantità a, b, c, ec. si considerino affette da qualsivogliano segni.

» B, C...... ; ond'è che dovrà esser possibil cosa il » determinar quelle da queste; poichè come in più di » un luogo del 2°. libro si è fatto rilevare, tale è la » natura di que' Problemi in cui le condizioni sono » tante quante le incognite distinte. Adunque è chiaro » che dovranno sempre esistere tali valori o espressio- » ni per le a, b, c......, che dal prodotto de' fatto- » ri $x+a$, $x+b$, $x+c$.... risulti la formola proposta. » Debbesi solamente notare, che ove non siavi nella formola proposta qualche termine, allora il coefficiente dell'analogo nel prodotto di que' fattori dovrà porsi uguale a *zero*.

329. *Cor.* Ciò posto la formola proposta potrà divenir zero per qualunque de' suoi fattori semplici sia zero, e quindi in m di casi diversi, cioè essendo $x+a=o$, $x+b=o$, $x+c=o$............ ossia $x=-a$, $x=-b$, $x=-c$............ Adunque

TEOREMA II.

L' espressione

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}........+T=o$$

che rappresenta un' equazione del grado m ridotta a zero, diverrà effettivamente zero per m di valori diversi che prenderà la x, necessariamente dipendenti dalla natura di tal equazione. Ossia: *Un' equazione del grado m ha m di radici.*

330. Ed è poi chiaro al contrario che: *Se la quantità a rappresenti una radice dell' equazione di sopra esposta, dovrà questa essere esattamente divisibile pel fattore $x+a=o$; e 'l quoziente ch' è una formola al grado $m-1$, dovendo risultare dal prodotto di tutti*

gli altri fattori semplici dell' equazione proposta meno il precedente $x+o=\pm o$, *dovrà essere anche* $=o$: poichè deve svanire del pari che ciascun altro di questi fattori quando per la x si sostituisca un valore che le corrisponde.

331. *Cor.* Siccome da fattori immaginarj può risultare un prodotto reale (144. *Es.* II.); può perciò avvenire che sebbene sia reale un' equazione proposta, possa essa aver fattori immaginarj, i quali daranno luogo a radici immaginarie per l' equazione, e della forma $a\pm b\sqrt{-1}$.

TEOREMA III.

332. *In ogni equazione, come la seguente*

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}.......+T=o$$

in cui il coefficiente del primo termine sia $+1$ *e ridotta a zero; il coefficiente* A *del secondo termine dovrà pareggiare la somma delle radici dell'equazione col segno contrario; quello del terzo termine dovrà essere quanto la somma delle combinazioni binarie di esse radici col proprio segno....... quello del termine n quanto le combinazioni delle radici al grado* $n-1$, *col segno proprio se n sia impari, contrario se pari.*

La dimostrazione di ciò è chiara dal n.° 183.

333. *Cor.* Quindi *l'ultimo termine di un' equazione composta, sarà quanto il prodotto di tutte le sue radici, preso col proprio segno se l' equazione era di grado pari, col contrario se impari.*

TEOREMA IV.

334. *Se l' equazione*

$$x^m \pm Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

abbia tutte le sue radici reali e positive, dovrà avere i segni de' suoi termini alternativameute positivi e negati, cioè il primo affetto del + il secondo del —, il terzo del +, il quarto del —, ec. E se le radici sieno reali e negative, i segni de' termini dovranno essere tutti gli stessi: cioè a dire nel primo caso vi avrà luogo tutte alternazioni di segni ne' termini dell'equazione, nel secondo tutte successioni di segni.

Ciò è chiaro dal numero 329.

TEOREMA V.

335. *Al contrario se un' equazione che ha tutte le radici reali abbia tutte alternazioni, le avrà tutte positive; se ha tutte successioni le avrà tutte negative.*

Sia l' equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

si avrà trasportando nel secondo membro i termini de' luoghi pari

$$x^m + Bx^{m-2} \ldots\ldots = Ax^{m-1} + Cx^{m-3} \ldots\ldots$$

ed è chiaro che nell' un de' membri vi si dovranno contenere tutte le potenze impari della x, in un altro le pari; che perciò si vede che mai potrà aver luogo il pareggiamento di tali due espressioni, a meno che non si supponga la x dinotata da quantità positive,

mentre supponendole negative, l' un de' membri risulterebbe positivo, l' altro negativo.

Che se poi l' equazione proposta fosse stata della forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

trasportando similmente nel secondo membro i termini de' luoghi pari si troverà esser positivo il primo membro, negativa l' espressione del secondo. Or perchè possa aver luogo tal pareggiamento bisogna che la x rappresenti una quantità negativa; perchè in tal caso se il primo termine conteneva le potenze pari della x, rimarrà positivo, e quelli del 2. membro lo diverranno pure, contenendo le potenze impari di una quantità negativa multiplicato per coefficienti negativi; e se al contrario, risulterà negativo il primo membro, e resterà tuttavia tale il secondo.

TEOREMA VI.

336. *Se nella formola*

$$x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \pm T \qquad (M)$$

completa nel suo numero di termini, in cui i segni di questi si seguano con qualunque ordine di alternazioni e di successioni, s' introduca il fattore $x-a$, la nuova formola

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} \pm Ax^m \pm Bx^{m-1}\ Cx^{m-2} \ldots\ldots \pm Tx \\ \quad \mp aAx^m \mp aBx^{m-1} aCx^{m-2} \ldots\ldots \mp T \end{array}\right\} (M')$$

dovrà avere necessariamente un' alternazione di segni di più che la proposta.

E se tal fattore fosse $x+a$, la nuova formola M' avrebbe una successione di più che la proposta.

Dim. È chiaro primieramente che nella prima li-

nea della formola M' abbian luogo ne' suoi termini 1.°, 2.°, 3.° ec. gli stessi segni che in quelli della formola M; e che viceversa ne' termini della seconda linea 1.° 2.° 3.° ec., i quali pel grado della x corrispondono a quelli della prima dal 2.° in poi, i segni di essi sono direttamente opposti a quelli de' termini dell' ordine stesso nella prima linea. Dal che risulta che ogni qual volta nel contrarsi i termini delle due linee per ottenere il prodotto M' abbia luogo in una di queste contrazioni il segno della linea inferiore, mentre nella precedente contrazione aveva avuto luogo quello della superiore, in tal caso necessariamente vi dovrà aver luogo una permutazione di segni.

Ciò posto se in tutte queste contrazioni si conservassero i segni della linea superiore, il che può aver luogo fino al penultimo termine della formola M'; in tal caso si verranno ad avere in M' fino a questo termine gli stessi segni de' termini di M, e quindi le stesse alternazioni e successioni che vi erano in M; ma giunto a questo termine, siccome per passare al seguente, cioè all' ultimo termine di M', bisogna necessariamente scendere nella linea inferiore, così è chiaro, che dovrà esservi una permutazione di segni; che perciò M' ne avrà una di più che la formola proposta M.

Al contrario se, in qualunque luogo, eseguendo la contrazione de' termini corrispondenti delle due linee, si trovi che il risultamento sia del segno della linea inferiore, avrà già avuto luogo una permutazione di segni di più che nella formola M fino al luogo stesso: or due casi potranno accadere, cioè, o che pe' segni di tutti gli altri termini di M' si resti nella linea inferiore, o che si risalga alla superiore. Nel primo di tali casi, siccome da questo luogo in poi i segni de'

termini della linea inferiore, sono, termine per termine, direttamente gli opposti di quelli dell' ordine stesso che nell' espressione M, si vede perciò che in tutto il resto del prodotto M′ contratto vi continueranno ad aver luogo le stesse permutazioni e successioni che nel corrispondente resto della formola M: la formola M′ si troverà perciò avere una permutazione di segni di più che la proposta M.

Che se risalgasi di nuovo nella linea superiore; quantunque ciò avvenga per una nuova successione, perchè ne' termini corrispondenti dell' equazione M vi erà permutazione di segni; e che perciò questa distrugga la variazione poc' anzi ottenuta: imcominciando di nuovo da quì il ragionamento di poc' anzi, si vedrà sempre, che o restando nella linea superiore, o tornando a discendere nell' inferiore, e rimanendovi, debba aver luogo nell' equazione M′ una variazione di segni di più che nell'altra M.

Con un simigliante ragionamento potrà provarsi che introducendosi nella formola M il fattore $x+a$; nel prodotto M″ debba trovarvisi una successione di più ne' segni de' suoi termini, di quelle che v'erano in M. Adunque ec.

337. *Cor.* I. Quindi tante alternazioni di segni si indurranno nella formola M, quanti saranno i fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$ ec., che s' introdurranno in essa, e tante successioni di segni, per quanti saranno i fattori $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$ ec. che vi s' introdurranno.

338. *Cor.* II. Che perciò se la formola M era anch' essa della forma $x-p$, o $x+p$; si vede, che per ogni fattore $x-a$ vi s' introdurrà un' alternazione di segni, per ogni altro $x+\alpha$ una successione, sicchè essa alla fine si troverà avere *tante radici reali positive, quante alternazioni di segni s' incontrano tra i suoi termini*,

tante reali negative, quante sono le successioni. Ed al contrario : *Se un' equazione di cui le radici sieno tutte reali, ne abbia parte di esse positive e parte negative; saranno tante le positive quante le alternazioni di segni, e tante le negative quante le successioni.*

Imperocchè divisa tal equazione successivamente pe' suoi fattori derivanti da radici reali positive, e perciò della forma $x-a=0$, dovrà in fine ridursi alla forma di un'equazione in cui tutt' i segni saranno positivi; e per conseguenza che avrà tante successioni quante sono esse radici, cioè quanto è il grado di quest' equazione che è risultata per ultimo quoziente. Or se questa si multiplichi di nuovo per ogni uno di que' fattori reali positivi pe' quali si è divisa la proposta, si verrà per ognun di questi ad introdurre una variazione di segni; e queste però, giunti all' equazion proposta, si troveranno esser tante di numero quante sono le radici reali positive contenute in tal equazione.

339. *Scol.* La regola del Cor. prec., per discutere in un'equazione a radici reali il numero delle radici positive dal numero delle negative, che dagl' Inglesi si attribuisce all' *Harriot*, e da' Francesi, ed or da tutti gli Analisti moderni, al *Cartesio* (*) non è nel fondo che quella che diede il *Cardano* per le equazioni di 4.° grado generalizzata. Ed essa può talvolta essere utilmente impiegata a far conoscere in una equazione composta l' esistenza delle radici immaginarie.

(*) Ecco come si esprime anche il *Lagrangia*, che può valere per gl'Italiani ed i Francesi nel tempo stesso. » C'est là le fameux théo- » rème de *Descartes*, que les Anglais attribuent a *Harriot*. Not. VIII. al Trattato della sua *theorie des equations numeriques*.

Sia in fatti l' equazione

$$x^4+bx^2+m=o$$

in cui manca il 2° e'l 4° termine, che perciò ciascuno di essi potrà supplirsi con $\pm o$. Or nel caso che per ciascun di essi si prenda il $+o$, l' equazione si troverebbe avere tutte successioni, e quindi quattro radici negative, supposto che fossero reali; e prendendo il $-o$ per ciascun de' termini mancanti, l' equazione verrebbe ad avere quattro radici reali positive; ch' è contraddittorio al precedentemente trovato. Inoltre prendendo l' un di essi termini espresso da $+o$, e l' altro da $-o$, l' equazione si troverebbe avere due radici positive, e due negative, se esse fossero reali; il che distrugge anche le due precedenti ipotesi: che perciò dovrà concludersi, che l' equazione proposta debba avere le sue radici immaginarie.

CAP. II.

Di alcune altre proprietà' delle equazioni.

TEOREMA VII.

340. *Se si abbia una qualunque equazione ridotta a zero, e si conoscano due numeri tali, che sostituiti successivamente in luogo dell' incognita di quell' equazione diano risultamenti di segno contrario; l'equazione avrà necessariamente almeno una radice reale di un valore compreso tra quei due numeri.*

Dim. Sia x l'incognita di quell' equazione, ed α, β, γ, ec. dinotino le sue radici, p e q sieno i numeri che sostituiti per x diano risultamenti di segno contrario, dovranno perciò essere di segno contrario le due quantità

$$(p-\alpha)\ (p-\beta)\ (p-\gamma) \ldots\ldots$$
$$(q-\alpha)\ (q-\beta)\ (q-\gamma) \ldots\ldots$$

e quindi bisognerà che sienvi almeno due fattori corrispondenti, come $p-\alpha$, $q-\alpha$ di segno contrario; che perciò la quantità α dovrà essere minore di p e maggiore di q, e quindi media tra esse, e reale. (*)

(*) La presente dimostrazione dovuta al Signor Lagrangia mi è sembrata da anteporsi alle altre, anche in un libro elementare come questo, per la sua chiarezza, e perchè direttamente ricavata della composizione stessa di un' equazione.

TEOREMA VIII.

341. *Ogni equazione di cui l' ultimo termine è negativo, supponendo il primo positivo, ha necessariamente una radice reale positiva.*

Dim. Imperocchè supponendo il primo termine rappresentato da x^m, e l' *ultimo* da $-h$, si vede che ponendo $x=o$, l' equazione si riduce a $-h$; e ponendo $x=\infty$, l' equazione si ridurrà ad ∞^m; quindi si avrà per tal caso $p=o$, $q=\infty$; e l' equazione proposta dovendo avere per una delle sue radici una quantità compresa tra il *zero* e l' *infinito*, sarà questa necessariamante reale e positiva.

342. *Cor.* I. Quindi ogni equazione di grado impari di cui l' ultimo termine sia negativo, avrà necessariamente una radice reale positiva.

343. *Cor.* II. Che se l' ultimo termine sia positivo, si vede anche chiaro, che per ottenersi i due risultamenti di segno contrario, cioè $+h$, e $-\infty$, debbasi porre $x=-o$ ed $x=-\infty$; ond' è che questa in tal caso dovrà avere almeno una radice reale negativa.

344. *Cor.* III. Ogni equazione di grado pari con l' ultimo termine negativo dovrà avere necessariamente due radici reali, l' una positiva, l' altra negativa.

Imperocchè posta $x=o$, dà per risultamento $+h$, e posta $=+\infty$ dà $+\infty^m$; sicchè v' ha una radice reale compresa tra $+o$ e $+\infty$, e perciò positiva. Al contrario posta $x=-o$ si ha $-h$ per risultamento, e posta $x=-\infty$, si ha di nuovo $+\infty^m$; adunque vi dovrà essere un' altra radice reale tra $-o$ e $-x$, e quindi negativa.

TEOREMA IX.

345. *Se in una qualunque equazione che abbia una o più radici reali e disuguali si sostituiscano successivamente in luogo dell' incognita due numeri l' uno maggiore, e l' altro minore di una di quelle sue radici, che differiscano però tra loro per una quantità minore della differenza tra questa radice e ciascuna delle altre radici reali dell' equazione; queste due sostituzioni daranno necessariamente due risultamenti di segno contrario.*

Dim. Sia α una delle radici reali e disuguali dell' equazione, e β, γ, δ, ec. sieno le altre radici qualunque; ρ la più piccola differenza tra quella radice e ciascuna delle altre radici reali dell' equazione; è chiaro che prendendo $p>\alpha$, $q<\alpha$, e $p-q<\rho$ le quantità $p-\alpha$ e $q-\alpha$ saranno di contrario segno, e che le altre $p-\beta$, $p-\gamma$ ec. saranno del segno stesso che ciascuna delle corrispondenti $q-\beta$, $q-\gamma$, ec. poichè se due di questi fattori corrispondenti, come $p-\beta$, $q-\beta$ potessero risultare di contrario segno, dovrebbesi il β anche trovar compreso tra p e q; il che per la supposizione già fatta non può aver luogo. Laonde i due prodotti

$$(p-\alpha)\ (p-\beta)\ (p-\gamma)\ \ldots\ldots$$
$$(q-\alpha)\ (q-\beta)\ (q-\gamma)\ \ldots\ldots$$

avendo due fattori corrispondenti di segno contrario, e gli altri tutti dello stesso segno, dovranno risultare di contrario segno tra loro.

346. *Scol.* Da questa verità inversa dell' altra di-

mostrata nel Teor. precedente si potrebbero ricavare diverse conseguenze che noi abbiamo stimato a proposito di quì tralasciare, e da esse potrebbe anche ritrarsi una nuova dimostrazione del Teor. da noi riportato al n. 336 come potrà vedersi fatto dall'Illustre sig. *Lagrangia* nel §. 7 della sua *Théorie de la résolution des équations numériques*.



Quindi ritornardo di nuovo da radici della quantità A a radici dell' equazione $x^n = \pm A$, si vedrà chiaramente, che in essa se n è impari non vi possa esser che una sola radice reale, tutte le altre essendo immaginarie; e se n è pari ve ne potranno essere due sole reali, o pur tutte immaginarie, secondo che sia $+A$, o $-A$ nel secondo membro.

349. Volendosi dunque risolvere un' equazione della forma proposta, cioè

$$x^n = \pm A$$

basterà estrarre da ambo i membri la radice n, e si avrà così $x = \sqrt[n]{\pm A}$, il qual radicale darà per le ovvie regole dell' Aritmetica il valore dell' una radice del numero A, o pure dell' equazione proposta, se n è impari; e delle due, prendendo la stessa col segno doppio, se n è pari, e la quantità A positiva.

Dopo ciò, divisa, nel primo caso, l' equazione proposta per $x - \sqrt[n]{\pm A}$, e nel secondo per $x^2 - \sqrt[n]{A^2}$, il quoziente darà quella equazione composta dal maneggio della quale si perverrà a determinare tutte le altre radici immaginarie dell' equazione proposta o di un numero dato.

ESEMPJ.

350. I.° *Risolvere l' equazione pura di terzo grado*

$$x^3 - a = 0$$

La prima radice di quest' equazione è $x = \sqrt[3]{a}$; e divisa l' equazione proposta pel fattore $x - \sqrt[3]{a} = 0$, si ha per quoziente l' equazione di 2.° grado

$$x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$$

la quale risoluta dà per x i seguenti altri valori, cioè

$$x = \sqrt[3]{a}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$x = \sqrt[3]{a}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

E posta la $a=1$ in quell'equazione e nelle sue radici, si avrà

$$x = -1$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Che diconsi radici cubiche dell' *unità*.

II°. *Sia ora, l' equazione di quarto grado*

$$x^4 \mp a = 0\,, \quad \text{cioè} \quad x^4 = \pm a$$

Prendendola col segno superiore nel 2°. membro, ed estraendo d' ambo i membri la radice quarta, si avrà

$$x = \pm \sqrt[4]{a}$$

cioè $\quad x = +\sqrt[4]{a} \quad$ ed $\quad x - \sqrt[4]{a} = 0$

$\qquad x = -\sqrt[4]{a} \quad$ ed $\quad x + \sqrt[4]{a} = 0$

Quindi l' equazione proposta diverrà divisibile per $(x-\sqrt[4]{a})\times(x+\sqrt[4]{a})$, cioè per $x^2-\sqrt{a}=0$, e darà per quozionte $x^2+\sqrt{a}=0$, dalla quale equazione si avranno poi le altre due radici immaginarie della proposta, cioè $x=\pm\sqrt[4]{-a}$.

351. Consideriamo adesso l'altro caso dell' equazione proposta, cioè

$$x^4 + a = o$$

si avrà da principio

$$x = \pm \sqrt[4]{-a} = \pm \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{-1}.$$

Sicchè ci conviene ora vedere come possa ridursi $\sqrt[4]{-1}$, in una espressione, che non contenga che solamente radicali immaginarj di secondo grado (141).

Seguendo quello che altrove accennammo, pongasi $\sqrt[4]{-1} = a + b\sqrt{-1}$, si avrà, elevando a quadrato i due membri, $\sqrt{-1} = a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}$. Or essendo interamente immaginario il primo membro di questa equazione; tale dovrà pure essere il secondo, nel quale perciò dovrà supporsi $a^2 - b^2 = o$; quindi sarà pure $2ab = 1$: e da queste due equazioni volendo determinare i valori di a e b, sarà $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = b$, conseguenza la quale non contenendo condizione contraddittoria, ne mostra che sia possibile la supposizione di sopra fatta; che perciò sostituendo in $a + b\sqrt{-1}$ i valori di a, b poc' anzi ritrovati, si avrà $\sqrt[4]{-1} = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$. Sicchè finora abbiamo ottenute dall' equazione proposta le due radici.

$$x = + \sqrt[4]{a} \times \left(\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = - \sqrt[4]{a} \times \left(\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

Le quali ridotte a zero, e moltiplicate fra loro darebbero un fattore duplice pel quale dividendosi l' equazione proposta $x^4 + a = o$ se ne avrebbe un' altra anche di secondo grado che darebbe le altre due ra-

dici di quell'equazione. Ma esse sarà facile questa volta ottenerle dalle già ritrovate nel seguente modo, cioè riflettendo, che dall'equazione $a^2-b^2=0$ si ha non solamente $a=b$; ma anche $a=-b$; sicchè le altre due radici cercate saranno

$$x=+\sqrt[4]{a}\times\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x=-\sqrt[4]{a}\times\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

E questi due esempj potranno bastare per l'argomento che ci abbiamo proposto di trattare nel Capitolo presente.

352. L'incidente riduzione di $\sqrt[4]{-1}$ ad una forma $a+b\sqrt{-1}$, ci riconduce a dimostrar generalmente ciò che altra volta ci abbiamo proposto, cioè che: *Un radicale immaginario di qualunque grado è sempre riducibile alla forma* $a+b\sqrt{-1}$

Al che dimostrare premetteremo il seguente lemma.

353. *La radice del binomio immaginario* $a+b\sqrt{-1}$ *è un'altra espressione pariforme ad essa, che dinoteremo per* $x+y\sqrt{-1}$

Una tal cosa sebbene trovisi già per incidenza dimostrata nel n. 323, pure conviene qui provarla di proposito nel seguente modo

Sia come si è supposto

$$\sqrt{(a+b\sqrt{-1})} = x+y\sqrt{-1}$$

sarà quadrando i due membri

$$a+b\sqrt{-1} = x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$$

e procedendo innanzi per determinare i valori di x, y, si avrà

$$x=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}\right)},\ y=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}\right)}$$

e quindi

$$x+y\sqrt{-1}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}\right)}\sqrt{-1}$$

espressione della forma sopraindicata.

354. Ciò posto ritornando al Teorema di sopra enunciato, rappresenti $\sqrt[n]{-1}$ un radicale immaginario di un ordine qualunque, sarà chiaro che la n debba essere un numero della forma $2^r \times m$, ove m sia impari, e quindi $\sqrt[n]{-1}$ si ridurrà sempre a $\sqrt[2^r]{\sqrt[m]{-1}}$ ossia a $\sqrt[2^r]{-1}$ per essere sempre $\sqrt[m]{-1}=-1$; che perciò la presente dimostrazione dovrà limitarsi a' soli radicali immaginarj che abbiano per indice una potenza del 2.

355. Or si è già dimostrato che

$$\sqrt[4]{-1}=a+b\sqrt{-1}$$

ed essendo $\sqrt[8]{-1}=\sqrt{\sqrt[4]{-1}}=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$ dovrà anch'esso venir espresso in una forma $a'+b'\sqrt{-1}$. Similmente $\sqrt[16]{-1}=\sqrt{\sqrt[8]{-1}}=\sqrt{(a'+b'\sqrt{-1})}$ e quindi sarà espresso da $a''+b''\sqrt{-1}$, e così in seguito procedendo si vedrà che sieno della medesima forma $\sqrt[32]{-1}$, $\sqrt[64]{-1}$....... $\sqrt[2^r]{-1}$.

356 A completare la presente dimostrazione conviene avvertire, che sebbene noi abbiamo scelto per $\sqrt[m]{-1}$ il solo valore reale -1, mentre oltre questo ha -1 un altro numero $m-1$ di radici immaginarie (348); pure ciò non deroga affatto alla generalità della nostra dimostrazione.

Imperocchè le altre radici $m-1$ del -1, si vede chia-

mente che non potranno mai essere affette da radicale della forma $\sqrt[m]{-1}$, perchè altrimenti diverrebbero reali; che perciò i radicali donde verranno affette dovranno essere della forma $\sqrt[2^r]{-1}$, e perciò riducibili sempre, come si è dimostrato, alla forma $a+b\sqrt{-1}$.

SCOLIO.

357. Il Signor *Lagragia* nella Nota XIV. della più volte da noi citata sua opera: *Traité de la théorie des équations numériques*, ha trattato l'argomento che forma il soggetto del presente Capitolo, con quella profondità ad estensione propria del suo sublime ingegno; ed è per questa ragione per l'oppunto, che nè le sue ricerche, nè quelle del celebre Signor *Gauss* hanno potuto aver luogo nel presente libro elementare.



CAP. IV.

DELLE RADICI IMMAGINARIE IN GENERALE DELLE EQUAZIONI.

TEOREMA I.

358. *Se un'equazione ha radici immaginarie, ognuna di queste dovrà avere la forma* $a \pm b\sqrt{-1}$.

Imperocchè fatta la divisione di una tale equazione pe' suoi fattori reali, se mai ne abbia, essa diverrà della seguente forma

$$\text{N.} \quad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + V = 0$$

nella quale m dovrà essere necessariamente pari, e l' ultimo termine V positivo (344). Or siccome tutti i valori della x in questa equazione debbono essere immaginarj, essi si potranno generalmente rappresentare nella forma $y\sqrt[m]{-1}$, e stras'ormando con tal supposizione l' equazione N, essa diverrà

$$\text{N}' \quad y^m + \frac{P}{\sqrt{-1}} y^{m-1} + \frac{Q}{(\sqrt{-1})^2} y^{m-2} \ldots - V = 0$$

nella quale i valori della y sono immaginarj, perchè espressi in funzioni de' coefficienti de' termini dell' equazione N′ che sono tutti immaginarj e della forma $a + b\sqrt[m]{-1}$. Laonde saranno anche immaginarj e della forma stessa i valori di x che sono rappresentati da quantità della forma $a + b\sqrt{-1}$ moltiplicate per altre della forma stessa, e che rappresentano $\sqrt[m]{-1}$; come si è dimostrato (354 e *seg.*).

due radici immaginarie ne risulta un prodotto reale di secondo grado della forma $x^2-2ax+a^2+b^2=0$; si vede perciò che: *Ogni equazione composta potrà sempre scindersi in fattori reali, o di primo, o almen di secondo grado.*

PROBLEMA.

362. *Scindere un' equazione composta ne' suoi fattori duplici.*

Soluz. L' equazione data sia

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots\ldots\ldots+Tx+V=0,$$

ove la m è pari, ed essa si supponga derivare dal prodotto del numero $\frac{1}{2}m$ di fattori duplici della forma $x^2+ax+b=0$ $x^2+a'x+b'=0$ ec., ove a, b, a', b', ec. indicano grandezze da determinarsi. Se tutti questi fattori si multiplichino tra loro, l' equazione M' che ne nasce dovendo essere identica alla proposta M, dovranno pareggiarsi i coefficienti delle stesse potenze della x nelle equazioni M, M', e queste equazioni essendo m di numero, saranno perciò quanto il numero delle indeterminate a, b, a', b' ec., le quali per mezzo di esse potranno restar convenevolmente determinate. Un esempio di ciò lo vedremo nel maneggio delle equazioni di 4.° grado.

resta anche determinato quello dell' incognita nella trasformata dall' esser data la legge di tal trasformazione.

366. *Scol.* Nell' equazione $x=Ay^p+B$, supponiamo la $A=1$, la $p=1$, sicchè essa riducasi all'altra $x=y+B$, e quindi $y=x-B$; sarà chiaro che le radici della trasformata cioè le y siano quante quelle della proposta, cioè le x, diminuite, o accresciute della quantità B, secondo che questa sia positiva, o negativa.

Che se suppongasi $p=1$, $B=o$, sicchè abbiasi $x=Ay$, ed $y=\frac{1}{A}$, si vede che per un tal caso le radici della trasformata, cioè le y, sieno quante le radici della proposta, cioè le x, moltiplicate per $\frac{1}{A}$, ossia divise per A, se tal quantità è un intero, moltiplicate, se un fratto.

Finalmente posta la $A=1$, la $B=o$, si avrà $x=y^p$, ed $y=\sqrt[p]{x}$; e le radici della trasformata si troveranno essere rispettivamente quanto le radici p di quelle della proposta, se p si suppone un' intero, o quanto le potenze p delle radici di quell' equazione, se p supponesi un fratto.

TEOREMA.

367. *Se l' equazione*

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots\ldots+T=0$$

si trasformi generalmente, ponendo per la x la formola $\alpha y^r+\beta$; *un termine qualunque della trasformata in cui l' esponente della x sia m, minore di n, e 'l coefficiente K, e quello del termine precedente H, dovrà avere la seguente forma*

$$\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(m-1)}\beta^{m-1}+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(m-2)}A\beta^{m-2}\right.$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-m+2)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(m-2)}B\beta^{m-3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+(n-m+2)H\beta+K\right](\alpha y^r)^{n-m+1}$$

Dim. Imperocchè eseguendo la trasformazione di sopra detta, cioè sostituendo ne' termini di quell' equazione in luogo della x e delle sue potenze, le rispettive della formola $\alpha y^r+\beta$, e moltiplicandole pe' coefficienti de' diversi termini, si vedrà subito, che il termine sopraindicato dovrà costare della somma del termine m della potenza n di $\alpha y^r+\beta$; del termine $m-1$ della potenza $n-1$ di questo stesso binomio, moltiplicato per A; del termine $m-2$ della potenza $n-2$ di tal binomio moltiplicato per C, e così successivamente fino al secondo termine della potenza $n-m+2$, e poi al termine primo della potenza $n-m+1$ di $\alpha y^r+\beta$;

la qual formola, come si vede; è per l'appunto la di sopra esposta.

368. *Scol.* Le quantità generali α, r, β potranno esser condizionate in tal modo, da far prendere all'espressione di un termine qualunque di una trasformata quel valore che si vuole: o anche di farlo divenir zero, il che è interessante per la soluzione delle equazioni; ed in tal caso converrà porre uguale a zero il termine che si vuole far svanire, ossia il suo coefficiente; non potendo supporsi che sia zero una potenza qualunque di αy^r; sicchè non resterà per adempiere alla condizione proposta, che di determinare la β; il che mostrà, che per soddisfare ad essa non è necessario che le radici dell'equazione proposta venghino moltiplicate per una qualche quantità, nè che si elevino a qualche potenza, o che se n' estragga radice; ma che basta solo di accrescerle o diminuirle della quantità β, ch' è però la sola che resta a determinarsi.

369. È facile anche il rilevare, che la determinazione di β per far svanire un termine qualunque, dipende dallo scioglimento di una equazione di un grado dinotato dal numero ch' esprime il sito di tal termine nell' equazione minorato di 1; di tal che pel secondo termine sarà quell' equazione del 1.° grado, pel terzo di 2.°, e così in seguito: Ed essa ascenderebbe al grado stesso dell' equazione proposta, se si volesse questa liberare dall' ultimo termine.

370. Or suppongasi che si voglia far svanire il secondo termine della trasformata generale recata di sopra, sarà $m=2$; e il coefficiente di tal secondo termine nella trasformata sarà

$$n\beta+A=0, \text{ donde } \beta=\frac{-A}{n}.$$

poteva anche direttamente rilevarsi dalla natura de' termini di un'equazione (332); poichè si vede che essendo ciascun di questi la somma semplice, o de' prodotti binarj, ternarj ec. di tutte le radici dell' equazione, allorchè questa avesse divisori ne' coefficienti de' suoi termini se ne libererebbe trasformandola in un'altra le cui radici fossero quanto quelle della proposta moltiplicate per una quantità divisibile per ciascun di que' divisori. Laonde per eseguire una tal trasformazione, dinotando quel multiplice per P, ed esprimendo x l' incognita dell' equazione proposta, ed y quella della trasformata, dovrà porsi $Px = y$, cioè sarà per questo caso $\alpha = \frac{1}{P}$, $r = 1$, e $\beta = 0$, e con la sostituzione di queste quantità, e de' numeri 1, 2, 3..... per m nell'epression generale di un termine della trasformata (367), che in questo caso riducesi a $K(\alpha y^r)^{n-m+1}$ si avrà; moltiplicando in fine l' intera equazione pel divisore del suo primo termine, la trasformata cercata.

ESEMPJ

373. I.° *Sia l' equazione*

$$x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + 6 = 0$$

In questo caso $P = 24$, e quindi $\alpha = \frac{1}{24}$. Laonde eseguendo la trasformazione col metodo di sopra indicato, si avrà l' altra equazione libera da divisori

$$y^4 + 16y^3 + 432y^2 - 8640y - 1990656 = 0$$

374. II.° Sia pure la seguente equazione, i cui coefficienti sieno fratti decimali

$$x^4+0,15x^3+0,003x^2+0,0006x-0,0005=0$$

sarà il P in questo caso uguale a 10000 ch'è il decimale di massimo grado, ed $\alpha=0,0001$; e la trasformata che cercasi libera da' fratti sarà la seguente

$$y^4+1500y^3+300000y^2+6000000000y-5(1000)^3=0$$

375. Finalmente se l'equazione manchi di taluni termini, ed abbia negli altri l'incognita con esponenti suscettivi di uno stesso divisore t; in tal caso l'equazione proposta potrà trasformarsi in un altra del grado espresso da $\frac{n}{t}$ ponendo $x=y^{\frac{t}{n}}$; poichè in tal caso si avrà $x^n=y^t$; e così successivamente per le altre potenze della x.

Esempj.

376. I.° Sia l'equazione

$$x^4+ax^2+b=0$$

del quarto grado mancante de' termini pari. In tal caso è $t=2$, $n=4$; e ponendo $x^4=y^2$, e quindi $x^2=y$, si otterrà la trasformata

$$x^2+ay+b=0$$

che apparisce del 2.° grado, e può risolversi con le regole date per queste. Non pertanto la x avrà sempre quattro valori; poichè determinati quelli della y nella trasfosmata, che sono $y=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2-b(}}{2}$, e sostituita questa espressione della y nell'equazione $x^2=y$, dal maneggio di questa si avranno i quattro valori della x compresi nella formola $x=\pm\sqrt{\left(\frac{-a\pm\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right)}$.

377. II. Sia similmente l'altra equazione

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = o$$

sarà in questo caso $n=6$, $t=3$, e perciò $u^6=y^2$, ed $u^3=y$; e la trasformata sarà

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = o$$

dalla quale si ha

$$y = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$$

e quindi

$$u = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]}$$

$$u = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$u = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

saranno i sei valori della u nell' equazione proposta.

E similmente si procederebbe ad operare in altri casi.

378. *Def.* Ogni equazione del grado n, che per mezzo della supposizione $x^n=y^t$ si può trasformare in un altra del grado $\frac{n}{t}$, si dice del grado n *derivativa* del grado $\frac{n}{t}$

Così l' equazione del 1.° Esempio è di 4.° grado derivativa del 2.°; e l' altra del 2.° Esempio l' è del 6.° derivativa anche del secondo.

379. *Scol.* E dalle precedenti cose si rileva manifestamente, che nel maneggio delle equazioni derivative si ricada sempre su quello delle equazioni a due termini.

CAP. VI.

Soluzione generale delle equazioni di terzo grado.



380. La forma generale che possiam dare ad una equazione di terzo grado è la seguente.

$$x^3 + px + q = 0$$

poichè se essa sia fornita del secondo termine, può sempre a questa forma ridursi (170).

Si ponga la $x=u+z$; e con tal supposizione si trasformi quella equazione nell' altra

$$u^3+z^3+(3uz+p)(u+z)+q=0$$

E siccome la x si è supposta divisa arbitrariamente in $u+z$, si potrà perciò introdurre in questa equazione ottenuta a due indeterminate una condizione qualunque, donde l' una resti dall' altra determinata. Suppongasi perciò essere

I. $$u^3+z^3+q=0$$

dal che si vedrà essere anche

II. $(3uz+p)(u+z)=0$, cioè $3uz+p=0$

non potendo divenir mai zero l' altro fattore $u+z$ che pareggia x; altrimenti nell' equazion proposta da principio si troverebbe $q=0$

E da questa equazione $3uz+p=0$ presane l' espres-

sione di z, ch' è $-\frac{p}{3u}$, si sostituica nella I., la quale diverrà, convenevolmente ridotta,

$$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$$

ed i valori della u saranno quelli esibiti nel n.° 387., cioè

$$u=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$$

$$u=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$u=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

e da questi per mezzo dell'equazione $z=-\frac{p}{3u}$ se ne rileveranno per u i seguenti valori

$$z=\frac{-\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$$

$$z=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\mp\sqrt[3]{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$z=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\mp\sqrt[3]{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Per lo che essendosi supposto $x=u+z$, sarà

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

I quali qualori della x sebbene appariscan sei di numero, a causa del doppio segno di $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$; pure siccome ciascun di essi valori è identico al suo corrispondente, e solamente vi si trova scambiato il sito de' termini; perciò tali valori non saranno effettivamente che i tre seguenti

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

381. *Scol.* 1. Esaminando le espressioni algebriche

delle radici dell'equazione di 3.° grado, si vedrà chiaramente, che quando p sia quantità positiva, o pur che essendo negativa sia $\frac{p^3}{27}$, cioè $\left(\frac{1}{3}p\right)^3 < \frac{q^2}{4}$ cioè di $\left(\frac{1}{2}q\right)^2$, in tal caso la prima radice dell' equazione risulterà reale, e le altre due saranno immaginarie. Ma se al contrario essendo negativo il p, sia $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$; la prima radice apparirà immaginaria, e sotto tal forma si presenteranno anche le due altre; il che è manifestamente impossibile (360). In questo caso, al contrario, esse tre radici sono reali. Di fatti la prima radice si rileva esser tale dal n.° 211.; e per le altre due, dinotando lo sviluppo del 1.° termine della prima radice per $A+B\sqrt{-1}$, e quindi quello del secondo termine per $A-B\sqrt{-1}$, si vede che esse sieno espresse da

$$x=\left(A+B\sqrt{-1}\right)\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\left(A-B\sqrt{-1}\right)\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$x=\left(A+B\sqrt{-1}\right)\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\left(A-B\sqrt{-1}\right)\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

le quali intuitivamente, o pur eseguendo le moltiplicazioni indicate, si rileverà essere espressioni reali.

382. *Scol.* 1. Un tal caso in cui le radici sebbene effettivamente reali, compariscono in forma immaginaria, nè sono riducibili a quantità reali che per mezzo dello sviluppo del binomio, e quindi per approssimazione, vie-

ne ordinariamente conosciuto col nome di *caso irriducibile*: e poichè questo difetto di corrispondenza tra la natura delle radici dell'equazioni cubiche in questo caso, e la forma in cui si presentano non può risultar da altro che dal metodo impiegato in rinvenirle; è necessario perciò che qui almeno si dimostri donde ciò abbia origine.

383. Sia dunque l'equazione

$$x^3 \pm o - px - q = o$$

con l'ultimo termine negativo, ed a radici reali: è chiaro primieramente, dall'ordinamento de' segni de' suoi termini, che debbonvi essere due radici negative, ed una positiva (338). Sieno le due prime espresse da $-\alpha$, $-\beta$, e l'altra da $+\gamma$; dovrà essere $\gamma = \alpha + \beta$ (332), e di più ciascuna di tali quantità sarà minore di $2\sqrt{1/3p}$. Imperocchè se nella proposta equazione pongasi $x = o$, si otterrà il risultamento negativo $-q$; e ponendo $x = 2\sqrt{1/3p}$, il risultamento $1/3p\sqrt{1/3p}$ sarà positivo, a cagione di $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; ond'è, che la radice positiva γ dovrà essere $> o$ e $< 2\sqrt{1/3p}$ (340). Al contrario se l'ultimo termine dell'equazione proposta si fosse supposto positivo, una al equazione avrebbe due radici positive ed una negativa, e sarà sempre $\gamma = \alpha + \beta$, e $\gamma < 2\sqrt{1/3p}$.

Ciò posto osservisi, che per risolvere l'equazione proposta si è fatto $x = u + \frac{p}{3u}$, dalla qual equazione si ha $u^2 - xu + \frac{p}{3} = o$, donde si ricava $u = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} - \frac{p}{3}\right)}$, espressione che diventa immaginaria nel caso di $x^2 < \frac{4p}{3}$, cioè di $x < 2\sqrt{1/3p}$, come appunto avviene nel caso irriducibile. Adunque in tal caso il metodo adottato per lo ri-

solvimento delle equazioni cubiche, ch'è fondato sulla supposizione di $x=u+\frac{p}{3u}$ è quello che ci conduce necessariamente a forme immaginarie per le radici. Ma non essendo riuscito finora agli Analisti il poter fare altrimenti nel risolvere queste equazioni, bisogna contentarsi di una tale imperfezione, la quale in fine niente deroga all' esattezza de' risultamenti ne' casi particolari; poichè per ottenere il valore di essi bisogna sempre ricorrere alle approssimazioni. Sicchè converrà tenere il *caso irriducibile* nell' Algebra al pari del difetto della quadratura esatta del cerchio nella Geometria, la quale ha però questa vantaggio sull' Algebra, che in essa un tal caso non ha luogo; non essendovi bisogno per la determinazione delle radici di un' equazione, che cada in questo caso di prima risolverla; ma potendo senza ciò fare, costruirla; il che lo vedremo in altro luogo a proposito.

384. *Scol.* II. Nel risolvimento delle equazioni di 3.° grado, come in altre ricerche sulla natura dalle equazioni, e'l metodo onde risolverle abbiamo preferito quelle maniere di trattarle che ci sono sembrate più naturali, e che conteneano in loro quello spirito di ricerca, che non deve mai scompagnarsi dalle analitiche disquisizioni, trascurando perciò molti metodi di modernissimi Analisti, che di tali qualità ci sono sembrati sforniti, e che nel loro andamento sono duri, e pajono profeticamente dettati.

ESEMPJ.

385. I. *Risolvere l' equazione*

$$x^3+6x-4=0$$

Paragonandola con la generale (380.) si ha $q=-4$,

$p=+6$, donde si vede che debba essa avere una radice reale e due immaginarie; ed esse radici si otterranno col sostituire i suddetti valori di p e q nelle formole generali di tali radici recate nel n. 380.; ed esse risulteranno le seguenti

$$x=\sqrt[3]{(2+2\sqrt{3})}+\sqrt[3]{(2-2\sqrt{3})}$$

$$x=\sqrt[3]{(2+2\sqrt{3})}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{(2-2\sqrt{3})}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{(2+2\sqrt{3})}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{(2-2\sqrt{3})}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

389. II. Sia ora $x^3-6x-4=0$ l'equazione proposta, si avrà

$p=-6$, $q=-4$; e quindi $\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}=\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$

che perciò la proposta equazione cadrà nel caso *irreducibile*, e le sue radici verranno espresse da

$$x=\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}$$

$$x=\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

387. E ciò basti per ora intorno a questo argomento, sul quale dovremo ritornare in appresso, per vedere in qual modo possano covenevolmente ridursi queste espressioni delle radici di un equazione del terzo grado affinchè si possa di esse far uso.



CAP. VII.

Soluzione generale delle equazioni del quarto grado.

388. Prenderemo anche per equazion generale di 4.° grado la seguente mancante del 2.° termine.

$$x^4 + px^2 + qx + r = o$$

E siccome ogni equazione del grado $2n$ può scindersi in fattori reali di due dimensioni (361); potrà però supporsi, che la proposta sia il prodotto de'seguenti fattori

$$x^2 + ax + b = o$$
$$x^2 - ax + c = o$$

in cui i secondi termini si sono supposti identici e di segno contrario, per la ragione che debba svanire nel prodotto di esse, che sono i fattori della proposta, il 2.° termine. E dovendo essere un tal prodotto

$$x^4+(b+c-a^2)x^2+(ac-ab)x+bc=o$$

identico all'equazione proposta, dovranno aver luogo le seguenti equazioni tra i coefficienti de' termini stessi dell' una e dell' altra, cioè

$$b+c-a^2=p \qquad ac-ab=q \qquad bc=r$$

nelle quali tre equazioni, prendendo per indeterminate le a, b, c, si avrà prima

$$2c=p+a^2+\frac{q}{a} \qquad 2b=p+a^2-\frac{q}{a}$$

e quindi l' eliminata in a, che sarà la seguente

$$a^6+2pa^4+(p^2-4r)a^2-q^2=0$$

la quale come si vede è del 6.° grado derivativa del terzo; che perciò ponendo $a^6=y^3$, sarà $a^4=y^2$, $a^2=y$, ed essa si trasformerà nell' altra

$$y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0$$

che dovrà avere necessariamente una radice reale positiva, poiche è negativo l' ultimo suo termine (341) Esprimasi tal radice per $4\alpha^2$, che perciò sarà $a=2\alpha$; e questo valore di a sostituito nelle espressioni di sopra ottenuto per b, c, ed indi convenevolmente ridotte con questi valori le due equazioni che da principio si sono supposte i fattori dell' equazione proposta di 4.° grado, ed indi risolvendolo daranno

$$x=-\alpha+\frac{\sqrt{(\ q\alpha-2p\alpha^2-4\alpha^4)}}{2\alpha}$$

$$x=-\alpha-\frac{\sqrt{(\ q\alpha-2p\alpha^2-4\alpha^4)}}{2\alpha}$$

$$x=\ \alpha+\frac{\sqrt{(-q\alpha-2p\alpha^2-4\alpha^4)}}{2\alpha}$$

$$x=\ \alpha-\frac{\sqrt{(-q\alpha-2p\alpha^2-4\alpha^4)}}{2\alpha}$$

che sono le quattro radici dell' equazione proposta.

389. *Scol.1.* Nella ricerca precedentemente fatta per trovar la forma delle radici di una equazione di 4.° grado, ci siamo valuti di una sola radice dell' equazione ausiliaria di 3.° grado, nella quale si è ricaduto; conviene ora, per completar questo argomento, dimostra-

re, che agli stessi risultamenti saremmo giunti adoperandovi qualunque delle altre due radici, e qualunque sia la natura di queste.

Di fatti supponiamole espresse l'una da $4\beta^2$, e l'altra da $4\gamma^2$; dovrà essere

$$-2p = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma^2$$

$$q^2 = 4\alpha^2 . 4\beta^2 . 4\gamma^2,$$

cioè $$q = 2\alpha . 2\beta . 2\gamma = 8\alpha\beta\gamma$$

e questi valori sostituiti nella prima espressione delle x, daranno

$$x = -\alpha + \frac{\sqrt{(8\alpha^2\beta\gamma + 4\alpha^4 + 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\gamma^2 - 4\alpha^4)}}{2\alpha}$$

$$= -\alpha + \frac{2\alpha\sqrt{(2\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2)}}{2\alpha}$$

$$= -\alpha + \beta + \gamma$$

E facendo la stessa sostituzione negli altri valori della x, ed eseguendo finalmente le riduzioni, essi si troveranno essere rispettivamente i seguenti

$$x = -\alpha - \beta - \gamma$$

$$x = \alpha + \beta - \gamma$$

$$x = \alpha + \gamma - \beta$$

390. Or se dal principio si fosse posta la $a = 2\beta$ o pure $= 2\gamma$, con lo stesso progresso di operazioni che si è fatto, dalla supposizione di $a = 2\alpha$ fino al termine del n°. 388. si sarebbero trovati pe' valori della x le stesse espressioni di poc' anzi. Adunque è chiaro che per ottenerli basti prendere per la y nell'equazione ausiliaria una qualunque radice, e quindi la prima che si offre, come la più semplice.

391. Vi è inoltre da osservare, che sebbene per una radice α^2 dell' equazione ausiliaria vi corrispondano due valori per l' a, come si ha dall' equazione $a^2=y$, l'uno positivo, l' altro negativo; pure basterà prendere l'un di essi ad arbitrio, poichè i valori di b, c, non verrebbero che a permutarsi; e le due equazioni che si pongono per fattori della proposta non resterebbero anche se non permutate.

392. *Scol.* 2. Non resta finalmente che a considerare di qual natura debbano ne' casi diversi risultare le radici dell' equazione di 4.° grado che si vuol risolvere. Ed essendo chiaro che la natura di tali radici sia immediatamente connessa con quella delle radici dell'*ausiliaria*, che può aver le sue radici o tutte tre reali, o una reale e due immaginarie, bisogna però particolarmente esaminare queste due supposizioni.

Sian dunque primieramente reali tutte le tre radici di quell'equazione, e di più positive, nel qual caso debbonsi alternare i segni di essa (334), e quindi esser negativa la p, e $p^2>4r$; in tal caso dall' ispezione de' quattro valori della x recati in fine del n.° 388 si vedrà che essi risultino tutti quattro reali.

Che se continuando ad esser reali le radici dell'equazione *ausiliaria*, taluna di esse si supponga negativa, il che non può aver luogo a meno che non ve ne sia anche un' altra negativa, e la rimanente positiva; poichè altrimenti il quarto termine $-q^2$ dell' equazione non potrebba essere affetto del segno $-$, come l' è: in tal caso dalla semplice ispezione de' quattro valori della x si rileverà che essi sieno tutti quattro immaginarj.

Inoltre sieno immaginarie due radici dell' *ausiliaria* β, cioè le espresse da 4, $4\gamma^2$, e quindi si rappresentino da

$$4(A^2-B^2+2AB\sqrt{-1}),\quad e\quad 4(A^2-B^2-2AB\sqrt{-1})$$

tale dovendo essere la forma di due fattori immaginarj quadratici che danno un prodotto reale; sarà

$$\beta=A+B\sqrt{-1},\ \gamma=A-B\sqrt{-1},$$

e quindi i precedenti quattro valori della x prenderanno la seguente forma, cioè

$$x=-\alpha+2A$$
$$x=-\alpha-2A$$
$$x=\alpha+2B\sqrt{-1}$$
$$x=\alpha-2B\sqrt{-1}$$

cioè due saranno reali e due immaginarj.

393. I seguenti esempj potranno servire di esercizio pel maneggio delle equazioni di 4.° grado, e di rischiaramento alle considerazioni de' due precedenti Scolj.

Esempio I.

394. L' equazione proposta sia

$$x^4-25x^2+60x-36=0$$

che paragonata con la generale, dà $p=-25, q=60, r=-36$, ond' è che l' ausiliaria sarà

$$y^3-50y^2+769y-3600=0$$

che ha le tre radici reali, cioè $y=9$, $y=16$, $y=25$. sarà dunque $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=2$, $\gamma=\frac{5}{2}$; e perciò la x della proposta avrà i seguenti valori

$$x=-\alpha+\gamma+\beta=\ 3$$
$$x=-\alpha-\gamma-\beta=-6$$
$$x=\alpha+\gamma-\beta=\ 2$$
$$x=\alpha+\beta-\gamma=\ 1$$

che sono tutte quattro reali

ESEMPIO II.

395. Sia ora proposta a risolvere l' equazione

$$x^4+3x^2-6x+10=0$$

l' ausiliaria sarà in questo caso

$$y^3+6y^2-31y-36=0$$

che ha per radici 4, -1, -9, cioè due negative ed una positiva: da esse si ha $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, $\gamma=\frac{3}{2}\sqrt{-1}$; e quindi i valori della x diverranno

$$x=-1+2\sqrt{-1}$$
$$x=-1-2\sqrt{-1}$$
$$x=1+\sqrt{-1}$$
$$x=1-\sqrt{-1}$$

cioè tutti quattro immaginarj

ESEMPIO III.

396. Sia ora proposta l' equazione

$$x^4-2x^2+16x-15=0$$

che dà per ausiliaria

$$y^3-4y^2+64y-256=0$$

le cui radici sono 4, $8\sqrt{-1}$, $-8\sqrt{-1}$, donde si ha

$$\alpha=1\ ,\ 4(A^2-B^2+2AB\sqrt{-1})=8\sqrt{-1}$$

e quindi

$$4(A^2-B^2)=0\ ,\quad \text{ed}\quad 8AB\sqrt{-1}=8\sqrt{-1}$$

donde si ha $A=B=1$; e perciò i quattro valori della x saranno

$$x=-\alpha+2A=1$$
$$x=-\alpha-2A=-3$$
$$x=\alpha+2B\sqrt{-1}=1+2\sqrt{-1}$$
$$x=\alpha-2B\sqrt{-1}=1-2\sqrt{-1}$$

due immaginarj, e due reali.

SCOLIO GENERALE.

397. Ed ecco fino a qual termine l' Analisi Algebrica possiede mezzi generali pel maneggio delle equazioni, e nè meno interamente scevri in taluni casi da difetto dipendenti dal metodo che si adopra pel risolvimento delle medesime. Pel rimanente, cioè per le equazioni superiori al quarto grado, a nulla han conferito gli sforzi degli analisti; ma il voler qui rapportare, anche in abbozzo, i principali de' loro tentativi, o il mostrar l' insufficienza di qualunque ricerca su tal proposito, come ha fatto l' egregio Professore Ruffini, attual Presidente della Società Italiana, sarebbe cosa aliena affatto dal nostro scopo: che perciò qui termineremo la dottrina del maneggio delle equazioni, e la prima parte del presente libro, riserbandoci ad esporre nell' altra i metodi particolari e di approssimazione a' quali gli analisti hanno avuto ricorso in mancanza di metodi universali, ed esatti.

Non abbiamo stimato però inutile di notare che dal momento che gli italiani conobbero l' Algebra pel trasporto operatone da Leonardo Pisano dagli Arabi presso di noi, cominciarono ad occuparsi di questa parte la più importante di essa, cioè dello scioglimento delle equazioni; e quindi essi da prima dieder forma

più convenevole e generale e stabiliron la regola pel maneggio di quelle del secondo grado, come vedesi operato fin da *Frate Luca* nel suo libro dell'*Arte Magna*. Posteriormente *Scipione del Ferro* rinvenne il primo la soluzione delle equazioni del terzo grado comprese nella forma $x^3+px=q$; e 'l Tartaglia compiè poi questo argomento dando la general soluzione delle equazioni di terzo grado, che avendo comunicata al Cardano, fu da questi nel 1545 pubblicata nella sua *Arte Magna*, ond' è che poi alla formola delle radici delle equazioni di terzo grado gli è restato il nome di *Cardanica*. Il maneggio di tali equazioni esigendo necessariamente ch' esse fossero libere del secondo termimine, dobbiamo da ciò conchiudere, che la dottrina delle trasformazioni cominciò anche ad esser coltivata dal Tartaglia. Fu anche il Cardano che ravvisò il primo il *caso irriducibile* nelle equazioni del terzo grado, e la moltiplicità delle radici di ogni equazione, in corrispondenza del grado della medesima. Egli inoltre avvertì che nelle equazioni pure di qualunque grado impari una sola radice vi era reale, e le altre tutte immaginarie; e noi abbiamo già detto di lui, che fu il primo a ravvisare la corrispondenza tra i segni de' termini di un' equazione a radici reali, e quelle di esse ch' erano positive e negative. E se questo valentuomo nell'esporre tutte le anzidette cose fu limitato, e talvolta incerto, conviene ciò attribuire allo stato della scienza, ed alla difficoltà di poter anche valersi di esempj per rischiarare il cammino di una scoperta, come ora a noi è dato di fare.

Finalmente Lodovico Ferrari discepolo del Cardano diede l' ultimo passo che tuttora conoscasi pel risolvimento delle equazioni composte, risolvendo quelle del 4°. grado; e 'l Bombelli mostrò che nel caso irriduci-

bile le tre radici erano reali, cosa ben difficile per allora; ed arrivò fino a veder come si potessero sotto forma reale rappresentare. Ecco dunque quanto innanzi, se riguardasi quello ch'è ora, avevan fatto progredire la dottrina delle equazioni i primi Analisti Italiani: ed oltre a ciò altro essi anche oprarono intorno a questo argomento, che a suo luogo faremo avvertire. Non è perciò che io voglia con questo distruggere interamente quella gloria che ad altri analisti stranieri, tal che principalmenle il Vieta e l'Harriot, devesi da noi tributare, per essere stati essi i primi, sulle orme loro segnate da quelli, a passare dagli esempj particolari de'quali quelli si erano serviti, al generale; di avervi data regola, di aver stabilito il metodo, e piantato il costume di usarne: ciò però è ben diverso dal riguardarneli assolutamente come inventori.



AVVERTIMENTO.

Alle dottrine finora esposte intorno alla teorica delle equazioni dovrebbero seguire i metodi particolari per la risoluzione di esse; l' esposizione de' metodi di eliminazione nelle equazioni composte, e l' Analisi Indeterminata, per compier così l' argomento intero di questo primo volume del nostro Corso di Analisi, giusta ciò che promettemmo nell' Avvertimento posto in principio di tal volume. Per questa volta però si pubblica come fogli degli Elementi di Algebra, quella parte solamente ch' è solita ad insegnarsi nelle Scuole; e ciò ad oggetto che questa edizione, la quale per altro non corrisponde, per una certa eleganza, e per l'imperizia dello stampatore, a quelle delle altre opere dell' Autore, si trova già per più della metà estinta, per essere stata a fogli distribuita a' giovani che hanno cominciato a far uso di tal libro.

INDICE.

DELL' ALGEBRA LIB. II.

DELLE EQUAZIONI DI 1. E 2. GRADO, E DI ALTRE RICERCHE CHE NE DIPENDONO.

DELL'ALGEBRA LIB. III.

TEORICA GENERALE DELLE EQUAZIONI.

Errori essenziali a correggere.

Pag 35. Nella noterella a piè di pag. si rancelli in fine *e così più appresso in questo numero stesso.*

58 *vers.* 15. sfondata — fondata

62. *id.* sinistra — a sinistra

78 18. $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ — $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$

88. 18. *numere intere n m — numero intero non*

96. 20. in 21. *aata se pare — data, se pari*

103. 7. a — a^2

110. 5. pure — esser pure

118. 1, TEOREMA III. — TEOREMA

123. Si badi che qui in vece di Cap. XIII. si è posto XIV. e con tal equivoco si è continuato fino al termine del Lib. I.

159. 8. esse — esser

161. 8. e — o

214. 6. *gati — gativi*

224. 4. *puro — pure.*

246. Si badi che in diversi luoghi di questa pagina il fratto $\frac{1}{3}$, o $\frac{a}{3}$ è coefficiente del p







